PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

7ª OLIMPIADA DE FÍSICA. VARSOVIA . POLONIA. 1974

1.-Un átomo de hidrógeno en el estado fundamental choca contra otro átomo de hidrógeno, también en estado fundamental, que se encuentra en reposo. Determinar la velocidad mínima para que la colisión sea inelástica. Si la velocidad es mayor se produce emisión de luz la cual puede observarse en el sentido de la velocidad inicial y en el sentido opuesto (esto es, alejándose la fuente del observador o acercándose a él) ¿Cuál es la diferencia entre las frecuencias medidas por los observadores anteriores?
Datos. Masa del átomo de hidrógeno m = 1,67.10^-27^ kg , Energía de ionización del átomo de hidrógeno = 2,18.10^-18^ J
7ª Olimpiada Internacional de Física. Varsovia. 1974.

Designamos con v la velocidad del átomo de hidrógeno. Después del choque ambos átomos salen unidos entre sí. Al ser un choque inelástico podemos aplicar el principio de conservación de la cantidad de movimiento, siendo m la masa de un átomo de hidrógeno.

$$mv = 2\ m\ v_d \ ;\ v_d = v/2$$

La velocidad de los dos átomos de hidrógeno unidos entre sí es la mitad que la del átomo que choca contra el que está en reposo.

La energía cinética inicial del sistema antes del choque es $Ec = \frac{1}{2}mv^2$

La energía cinética después del choque es: $Ecd = \frac{1}{2}2m\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$

La diferencia de energía $\Delta E = \frac{1}{4}mv^2$, debe ser absorbida por uno de los átomos de hidrógeno para pasar a un estado excitado con número cuántico n =2

$$\Delta E = \frac{1}{4}mv^2 = E_2 - E_1 = -\frac{2{,}18.10^{-18}}{2^2} - \left(-\frac{2{,}18.10^{-18}}{1^2}\right) = \frac{3}{4} * 2{,}18.10^{-18};$$

$$v = \sqrt{\frac{3 * 2{,}18.10^{-18}}{1{,}67.10^{-27}}} = 6{,}26.10^4\ \frac{m}{s}$$

Si el sistema emite luz de una frecuencia υ, el observador que mide esa frecuencia, viendo alejarse de él la fuente, encuentra una frecuencia υ_1 menor, mientras que el observador que la mide observando que la fuente se acerca a él, mide una frecuencia υ_2 mayor. En la figura 1, v_f es la velocidad de la fuente, c la de la luz y L la distancia que existe en un instante inicial entre la fuente y el observador

Si la fuente estuviese en reposo y el observador a una distancia L un frente de onda emplearía un tiempo para llegar al observador de $t_1 = \frac{L}{c}$, el siguiente frente de onda saldría de la fuente un periodo T después y llegaría al observador un tiempo T+L/c , para el tercer frente 2T + L/c y así sucesivamente .Los intervalos de tiempo que mide el observador son :

$$\Delta T_{1-2} = T + \frac{L}{c} - \frac{L}{c} = T \quad ; \Delta T_{2-3} = 2T + \frac{L}{c} - \left(T + \frac{L}{c} \right) = T$$

El observador determina que el periodo es T, igual al de la fuente y por consiguiente la misma frecuencia.

Si la fuente se desplaza con velocidad v_f hacia el observador resulta que el primer frente que sale de la fuente tardaría en llegar al observador L/c, el segundo frente se emite a menor distancia del observador, ya que la fuente en el tiempo T recorre una distancia v_f*T y se encuentra que el frente debe recorrer una distancia hasta el observador L-vf*t y llegaría al observador $T + \frac{L - v_f * T}{c}$, el tercer frente debe recorrer L-2v_f*T y llegaría al observador $2T + \frac{L - 2(v_f * T)}{c}$.Los intervalos de tiempo que mide el observador son:

$$\Delta T_{1-2} = T + \frac{L - v_f * T}{c} - \frac{L}{c} = T \left(1 - \frac{v_f}{c} \right) ;$$

$$\Delta T_{2-3} = 2T + \frac{L - 2(v_f * T)}{c} - T - \frac{L - v_f * T}{c} = T - \frac{v_f * T}{c} = T \left(1 - \frac{v_f}{c} \right)$$

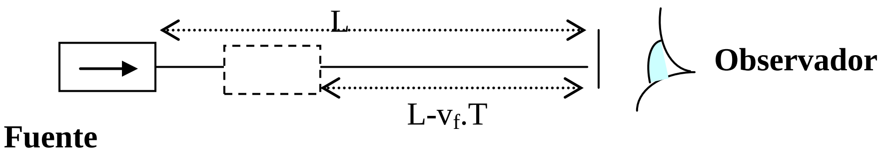


Fig. 1

El periodo que mide el observador es menor que si la fuente estuviese en reposo .Por tanto la frecuencia medida por el observador

$$\nu_2 = \frac{1}{\Delta T_{1-2}} = \frac{1}{T\left(1 - \frac{v_f}{c}\right)} = \frac{\nu}{1 - \frac{v_f}{c}}$$

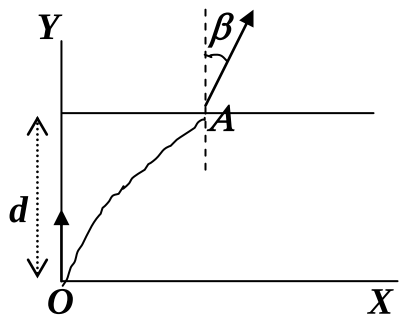
Con el mismo razonamiento se llega a $\nu_1 = \dfrac{\nu}{1 + \dfrac{v_f}{c}}$

$$\nu_2 - \nu_1 = \nu \left(\frac{1}{1 - \dfrac{v_f}{c}} - \frac{1}{1 + \dfrac{v_f}{c}} \right) = \nu \left(\frac{2 \dfrac{v_f}{c}}{1 - \left(\dfrac{v_f}{c} \right)^2} \right) \approx 2\nu \frac{v_f}{c}$$

Como la velocidad de la fuente es v/2

$$\nu_2 - \nu_1 = \nu \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\,\nu}{\nu} = \frac{6{,}26.10^4}{3.10^8} = 2{,}1.10^{-4}$$

2.-Un bloque está hecho con un material cuyo índice de refracción varía según la relación $n = \dfrac{n_o}{1 - \dfrac{x}{r}}$ ***en la que*** $n_o = 1{,}2$ ***; r es una constante de valor 13 cm y x es la abscisa según se indica en la siguiente figura***



El bloque tiene dos caras paralelas situadas a una distancia d. En el punto O un rayo de luz tiene la dirección del eje Y y abandona el bloque hacia el aire por el punto A formando con la normal en ese punto un ángulo $\beta = 30^o$***. Determinar el índice de refracción del bloque en el punto A y el valor del espesor d.***
7ª Olimpiada Internacional de Física. Varsovia. 1974.

Imaginemos un bloque de láminas paralelas con índices de refracción que aumentan de izquierda a derecha tal como se indica en la figura 1.

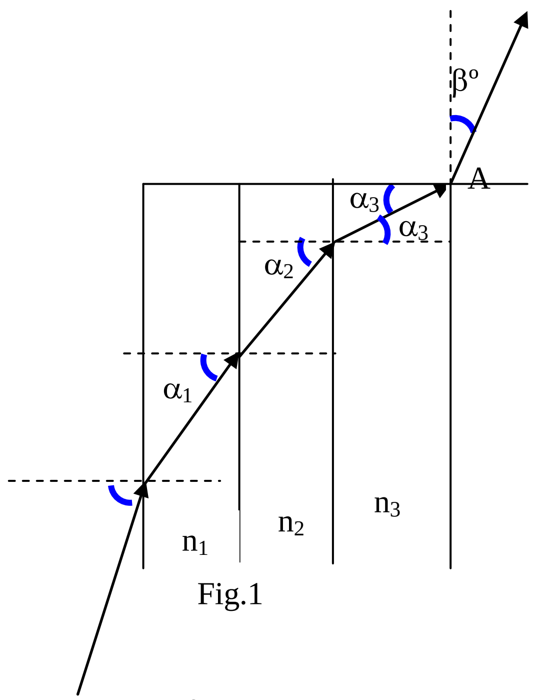


Fig.1

Se observa que los rayos de luz se curvan pues pasan de un medio de menor índice de refracción a otro de mayor índice de refracción. Al llegar al punto A salen al aire formando un cierto ángulo con la normal a la cara del bloque. Los rayos en la figura 1 forman una línea poligonal de tres lados . Si el número de láminas aumenta la línea poligonal tiene más lados y si el medio es continuo y varía el índice de refracción punto a punto, la marcha de la luz en la lámina es una curva continua.

Si en la figura 1 aplicamos la ley de Snell obtenemos:

$$n_1 \text{sen}\alpha_1 = n_2 \text{sen}\alpha_2 = n_3 \text{sen}\alpha_3$$

Si fuese mayor el número de láminas, lo único que haríamos es añadir términos a la cadena de igualdades anterior; se deduce que existe una ecuación general

$$n_x \text{sen}\alpha_x = \text{constante}$$

siendo x la coordenada de posición de un punto cualquiera del medio. Para hallar la constante podemos utilizar la condición inicial, esto es, que para x = 0, resulta que el ángulo α vale 90º

$$n_x \text{sen}\alpha_x = \frac{n_o}{1-\frac{0}{r}} = n_o = \text{constante}$$

Si se sustituye n_x por la expresión que indica su variación con la coordenada x, resulta:

$$\frac{n_o}{1-\frac{x}{r}} \text{sen}\alpha_x = n_o \qquad ; \qquad \text{sen}\alpha_x = 1-\frac{x}{r} \quad (1)$$

La ecuación (1) nos dice cómo varía el seno del ángulo que forma el rayo luminoso con la curva que describe la luz en cada uno de sus puntos. La figura 2 es un dibujo de la situación

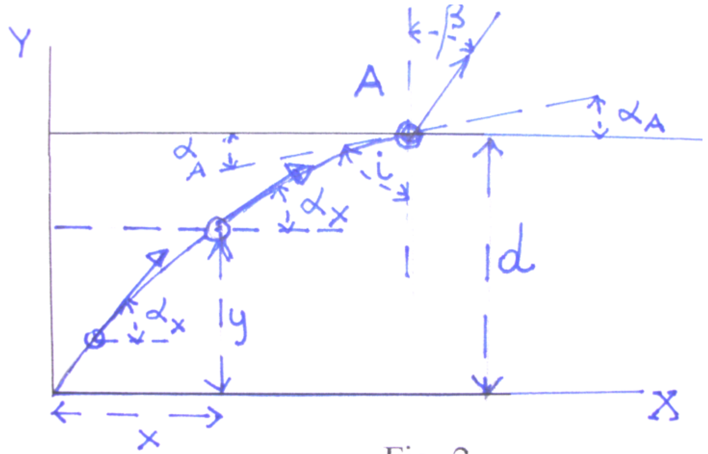


Fig. 2

Debemos deducir ahora cuál es la curva que describe la luz en el medio. Sabemos que la tangente a la curva en cada punto está dada por una ecuación de primer grado.
Cómo hipótesis admitimos que sea una circunferencia cuyo centro se encuentre en el eje x y cuyo radio sea r, ya que si x = r, resulta:

$$\text{sen}\alpha_x = 1-\frac{x}{r} = 0 \qquad ; \qquad \alpha_x = 0º$$

Con esta hipótesis la ecuación de la circunferencia es tal como puede observarse de la fig. 3

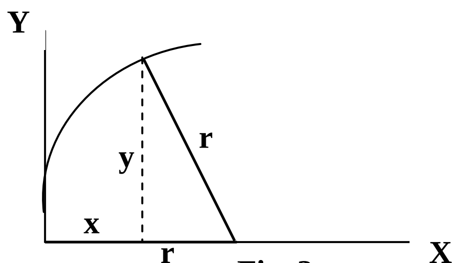


Fig. 3

$$(r-x)^2+y^2=r^2 \qquad (2) \quad ; \qquad y=\sqrt{r^2-(r-x)^2}$$

Si derivamos la función con relación a x el resultado es la tangente del ángulo que forma la recta tangente a la curva en cada punto.

$$y' = \frac{2(r-x)}{2\sqrt{r^2-(r-x)^2}} = \frac{sen\alpha_X}{\sqrt{1-sen\ \alpha_X}} \qquad \Rightarrow \quad sen\alpha_X = 1-\frac{x}{r}$$

Las ecuaciones (3) y (1) son idénticas, luego se deduce que la luz describe en el medio una circunferencia de ecuación (2)

Ahora vamos a encontrar las coordenadas del punto A

Cuando la luz llega al punto A(x = x_A) sale al aire formando con la normal un ángulo β = 30º, si aplicamos la ley de Snell tenemos:

$$n_A seni = 1*sen\beta \qquad ,pero \qquad i+\alpha_A = 90º \qquad \Rightarrow n_A cos\alpha_A = sen\beta$$

Sustituyendo n_A por su expresión: $n_A = \dfrac{n_O}{1-\dfrac{x_A}{r}} = \dfrac{n_O}{sen\ \alpha_A}$

$$\frac{n_o}{1-\frac{x_A}{r}}\cos\ \alpha_A = sen30º \quad ; \quad n_o\frac{cos\alpha_A}{sen\alpha_A} = sen30 \quad ; \quad tag\alpha_A = \frac{n_o}{sen30} = 2n_o$$

$$\frac{sen\ \alpha_A}{\sqrt{1-sen^2\alpha_A}} = 2n_o \Rightarrow \frac{sen^2\alpha_A}{1-sen^2\alpha_A} = 4n_o^2 \Rightarrow \frac{1-sen^2\alpha_A}{sen^2\alpha_A} = \frac{1}{4n_o^2} \Rightarrow \quad \frac{1}{sen^2\alpha_A}-1 = \frac{1}{4n_o^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{sen^2\alpha_A} = \frac{1+4n_o^2}{4n_o^2} \Rightarrow sen\ \alpha_A = \frac{2n_o}{\sqrt{1+4n_o^2}} = 1-\frac{x_A}{13} \Rightarrow \quad 1-\frac{2\cdot 1{,}2}{\sqrt{1+4\cdot 1{,}2^2}} = \frac{x_A}{13} \quad \Rightarrow$$

$$x_A = 1 \quad cm$$

$$n_A = \frac{n_o}{1-\frac{x_A}{13}} = 1{,}3 \quad ; y_A = d = \sqrt{r^2-(r-x_A)^2} = \sqrt{13^2-12^2} = 5\ \ cm$$