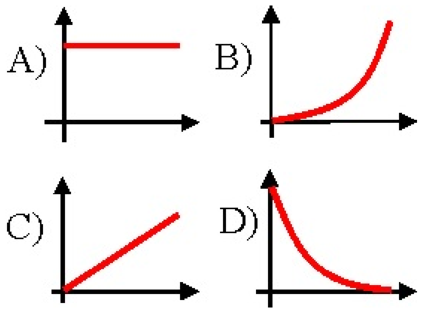
2.6. DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

2.6.1. Un móvil recorre una circunferencia con el módulo de su velocidad constante; ¿es cierto que sobre el móvil?

a) NO ACTÚAN FUERZAS
b) NO EXISTE ACELERACIÓN
c) ACTÚA UNA FUERZA QUE ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA VELOCIDAD
d) EXISTE UNA ACELERACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL RADIO DE LA TRAYECTORIA

SOL:

Cuando un móvil recorre una circunferencia sobre él debe actuar una fuerza dirigida hacia el centro de la misma que se conoce con el nombre de fuerza centrípeta. Esta fuerza es necesaria ya que proporciona al móvil aceleración, la aceleración centrípeta cuyo sentido es hacia el centro de su trayectoria, como consecuencia del cambio en la dirección del vector velocidad y cuyo módulo es: v^2/R, por lo tanto inversamente proporcional al radio de su trayectoria. Esta fuerza será en valor modular $|\vec{F}| = mv^2/R$, o sea directamente proporcional a la masa del móvil y al cuadrado de la distancia. En consecuencia sólo es válida la propuesta c.



2.6.2. La representación gráfica de la fuerza centrípeta frente a la velocidad es:

a) A b) B c) C d) D

Frente a la masa:

a) A b) B c) C d) D

Frente al radio de la trayectoria:

a) A b) B c) C d) D

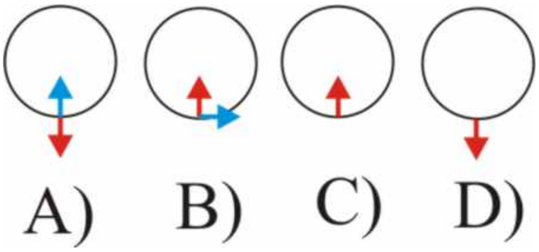
SOL:

-La expresión de la fuerza centrípeta es: $F= mv^2/R$. De acuerdo con lo anterior la representación gráfica del módulo de la fuerza centrípeta frente al módulo de la velocidad debe ser una parábola que corresponde a la opción b.

-Frente a la masa la opción c.

-Frente al radio la d.

2.6.3. Un móvil recorre una circunferencia de modo que el módulo de su velocidad crece linealmente con el tiempo. La mejor representación de las fuerzas que actúan sobre él es la:



SOL:

Puesto que el móvil recorre la circunferencia con velocidad creciente sobre el móvil existen dos aceleraciones, una la centrípeta dirigida hacia el centro de la circunferencia y la tangencial perpendicular a la anterior. Por tanto, debe existir una fuerza con dos componentes en las direcciones de las aceleraciones, la única solución posible es la b.

2.6.4. Una partícula de masa m gira en un plano horizontal describiendo una circunferencia con velocidad constante. De las afirmaciones siguientes hay una que es falsa:

a) EL MOMENTO ANGULAR DE LA PARTÍCULA RESPECTO DEL CENTRO DE LA TRAYECTORIA ES UN VECTOR CONSTANTE CON EL TIEMPO
b) EL MOMENTO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA PARTÍCULA RESPECTO DEL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA ES NULO
c) LA DIRECCIÓN DE LA FUERZA CENTRÍPETA QUE ACTÚA SOBRE LA PARTÍCULA PASA POR EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA
d) EL MOMENTO DE LA FUERZA CENTRÍPETA RESPECTO AL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA TIENE UN VALOR CONSTANTE NO NULO

SOL:

La definición de momento angular de una partícula respecto del centro de la trayectoria es:

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\mathrm{x}m\mathbf{v}$$

El vector momento angular es perpendicular al plano formado por **r** y **v, por lo tanto tiene** dirección y sentido constantes. Su módulo es $\left|\vec{L}\right| = \mathrm{rmvsen}\,90°$, y dado que todos los términos permanecen constantes con el tiempo, se deduce que el vector momento angular tiene también el módulo constante y la opción a es cierta.

Sobre la partícula actúa una fuerza que está dirigida hacia el centro de la circunferencia y el momento de dicha fuerza es:

$$\mathbf{M}= \mathbf{r}\mathrm{x}\mathbf{F}$$

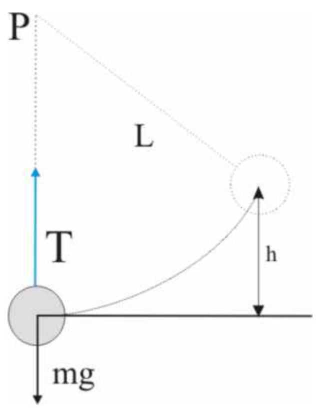
el vector **r** y el **F** forman siempre un ángulo de $180°$ lo que determina que el momento sea constantemente nulo. También es posible razonar que el momento de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es igual a la derivada respecto del tiempo del vector momento angular, expresado matemáticamente:

$$\mathbf{M}= d\mathbf{L}/dt, \text{ al ser } \mathbf{L} \text{ constante, } \mathbf{M}=0$$

la opción b es cierta.

La fuerza centrípeta está dirigida o apunta siempre al centro de la circunferencia por lo que c es verdadera.

La opción d es falsa de acuerdo con el razonamiento expresado al analizar la opción a.



2.6.5. Un péndulo simple de longitud l y masa m se separa de su posición de equilibrio hasta que alcanza una altura h. Si se deja en libertad la tensión del hilo al pasar por la posición más baja es:

a) mg b) $mg+m\cdot 2gh/l$ c) CERO d) mv^2/l

SOL:

Al separar el péndulo de su posición de equilibrio una altura h, tiene en dicha posición una energía potencial mgh. Cuando se deja en libertad y pasa por la posición más baja, dicha energía es cinética de modo que

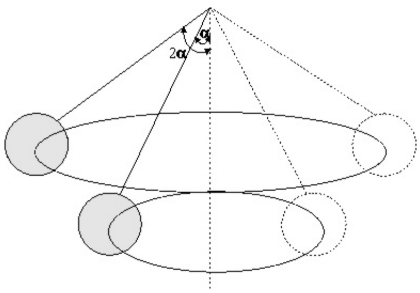
$$mgh= 1/2mv^2; \qquad v=\sqrt{2gh}$$

En la posición más baja sobre la masa del péndulo actúan dos fuerzas, el peso P y la tensión T de la cuerda, y como la masa tiene aceleración centrípeta se cumplirá:

$$T-mg= mv^2/l= m2gh/l; \qquad T= mg+m2hg/l$$

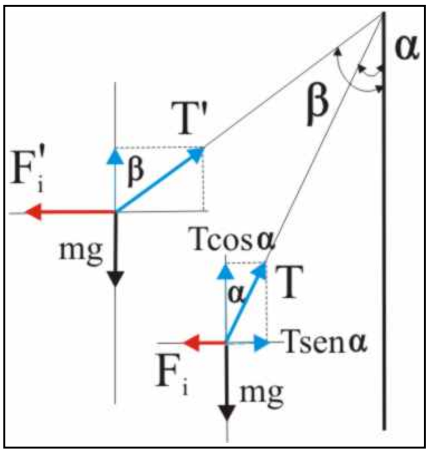
resultado que corresponde a la opción b.

2.6.6.* Comienzas a girar un pequeño péndulo simple, formado por una esfera metálica colgada de un hilo inextensible y de masa despreciable, en un plano horizontal, de manera que forme con el eje vertical cierto ángulo α. Si al cabo de un tiempo, el ángulo formado fuera el doble, dirás que:



a) LA TENSIÓN DE LA CUERDA HABRÁ AUMENTADO
b) SE INCREMENTÓ LA VELOCIDAD ANGULAR, AL PASAR DE UN ÁNGULO AL OTRO
c) VARIÓ EL PESO DE LA ESFERA
d) LA ACELERACIÓN CENTRÍPETA CRECIÓ
e) PARA EQUILIBRAR A LA ESFERA EN SU SISTEMA HARÁ FALTA UNA FUERZA INERCIAL MAYOR

SOL:



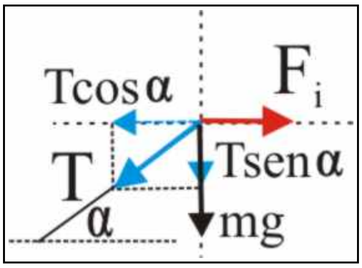
Si observamos el esquema de fuerzas dado en el dibujo y tomamos unos ejes en la propia esfera del péndulo, éste será un sistema no inercial y descomponiendo las fuerzas en componentes (X,Y), tendremos que $\begin{cases}\sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0\end{cases}$ por estar los ejes en la propia esfera.

Sobre el eje X, $-F_i + T \operatorname{sen} \alpha = 0$ (I)
Sobre el eje Y, $-mg + T \cos \alpha = 0$ (II).
Despejando T en (II) y llevándolo a (I),
$F_i = mg \tan \alpha$, que cuando se hace doble $F_i' = mg \tan \beta$.
Si $\beta = 2\alpha$, $\tan\beta > \tan\alpha$ y $F_i' > F_i$.
Como $\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}$, siendo **a**, la aceleración centrípeta. Si aumentó la fuerza inercial, también lo hará la aceleración centrípeta. Son correctas las soluciones d y e.
Igualando la fuerza de inercia $F_i = m\omega^2 R = mg \tan \beta$ y observando en la figura que $R = L \operatorname{sen} \beta$ resulta, $\omega = \sqrt{\frac{g \tan\beta}{R}} = \sqrt{\frac{g}{L\cos\beta}} = \sqrt{\frac{g}{L\cos 2\alpha}}$

Si llamamos ω' a la velocidad correspondiente al ángulo α y puesto que $\beta = 2\alpha$
Resulta que $\omega > \omega'$. La respuesta b es correcta.
Tampoco varía el peso, que se mantiene constante.
En la fórmula (II), $T = mg/\cos \alpha$. Si el ángulo aumenta, el $\cos\alpha$ disminuye, y por lo tanto, la tensión T' aumenta, por lo cual es correcta la propuesta a.
De los resultados de los cálculos se deduce que la fuerza de inercia es mayor al igual que la fuerza de inercia en la posición correspondiente al ángulo 2α.

2.6.7.* Un amigo tuyo te dice: "Soy capaz de dar vueltas sobre mi cabeza en un plano horizontal, a una piedra atada a una cuerda". Piensas un momento y le respondes: "¡Imposible!". Esta respuesta se basará en que:

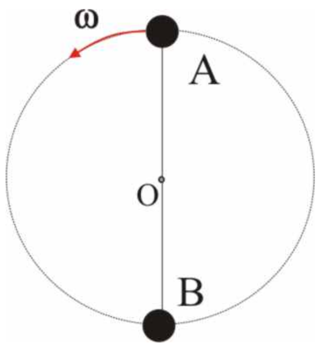
a) NUNCA SE PODRÍA EQUILIBRAR EL PESO EN ESE PLANO
b) LA CUERDA SE ROMPERÍA A LA VELOCIDAD NECESARIA PARA ELLO
c) LA TENSIÓN NO SERÍA CAPAZ DE CONTRARRESTAR LA FUERZA CENTRÍFUGA
d) EL PESO NUNCA PODRÍA SER CERO
e) NO EXISTIRÍAN FUERZAS DIRIGIDAS HACIA ARRIBA



SOL:
Si se observa el esquema de fuerzas de la figura, se comprobará que el peso del cuerpo no puede equilibrarse con la componente vertical de la tensión de la cuerda, aunque la componente horizontal de la tensión, si pueda contrarrestar la fuerza inercial sobre la piedra, por mucha velocidad que empleemos para ello, pues lo único que se conseguiría sería aumentar la fuerza inercial y la tensión, y romper la cuerda, al ser $\vec{F}_i = -m\frac{|\vec{v}|^2}{R}\vec{u}_N$ > $T\cos\alpha$. Si $|\vec{v}|$ aumenta, $\alpha \to 0$ $\cos\alpha \to 1$ y $m\frac{|\vec{v}|^2}{R} = T$, pero entonces mg no podría equilibrarse al ser T horizontal.

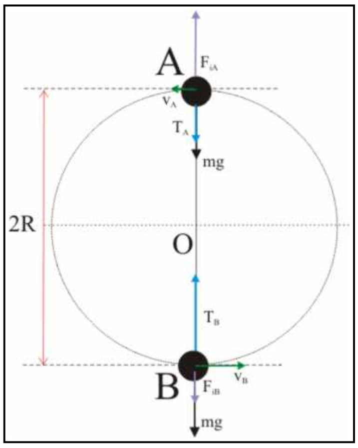
Téngase en cuenta que para cualquier ángulo α es: $T = \sqrt{\left(m\frac{v^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}$

Por lo tanto sólo son correctas las propuestas a, c y e.



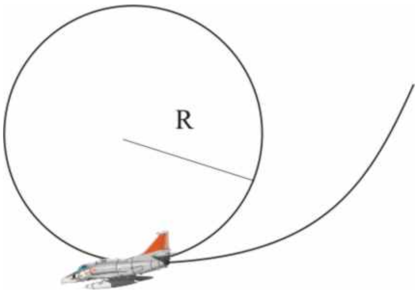
2.6.8.* Cuando haces girar un péndulo simple en un plano vertical con una velocidad angular ω, podrás decir que:

a) DONDE SE ROMPERÁ MÁS FÁCILMENTE LA CUERDA ES EN B
b) LA TENSIÓN DE LA CUERDA EN B, SUPERA A LA TENSIÓN EN A EN 4 VECES EL PESO DEL CUERPO
c) LA VELOCIDAD ANGULAR DE SU MOVIMIENTO NO ES CONSTANTE
d) LA VELOCIDAD DEL CUERPO EN B ES 5 VECES LA VELOCIDAD MÍNIMA PARA QUE SOBREPASE EL PUNTO A
e) SI LA CUERDA SE ROMPE EN B LA TRAYECTORIA SEGUIDA POR EL CUERPO SERÁ UNA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN B



SOL:
El equilibrio de fuerzas en B y A, suponiendo que en la esfera del péndulo ~~sea~~ tomamos un sistema no inercial (tiene aceleración centrípeta).
En B: $T_B = mg + F_i = mg + mv_B^2/R$ (I).
En A : $mg + T_A = mv_A^2/R$ (II) ; $T_A = mv_A^2/R - mg$.(III)
Si consideramos que no existen pérdidas por rozamiento, y que por lo tanto la energía en B (cinética), es igual a la que tiene en A (cinética y potencial).
En B: Energía cinética = $mv_B^2/2$
En A: Energía potencial = mg2R ; Energía cinética = $mv_A^2/2$.
De la conservación de la energía mecánica: $mv_B^2/2 = mv_A^2/2 + mg2R$;
$mv_B^2 = mv_A^2 + 4mgR$ (IV).

Sustituyendo en (I). $T_B=mg+mv_A^2/R+4mg=5mg+mv_A^2/R$.
Si sustituimos el valor de (II), $T_B=5mg+mg+T_A=6mg+T_A$. Por lo cual la máxima tensión es en B, que superará la de A en 6mg. La respuesta a es correcta, y no lo es la b.
La velocidad angular no podrá ser constante ya que la velocidad lineal tampoco lo es, pues $v_B>v_A$.
La velocidad mínima en A, supondrá que $T_A=0$, y $mg=mv_A^2/R$; $v_A^2=Rg$.
Si se sustituye este valor en (IV), $v_B^2=v_A^2+4Rg=5Rg=5v_A^2$, $v_B=v_A5$, que no corresponde a la respuesta d.
Si la cuerda se rompe en B, $T_B=0$, y la esfera del péndulo sale impulsada con una velocidad inicial $v_B\mathbf{i}$, tangencial a la trayectoria circular en ese punto y sometida a una aceleración $-g\mathbf{j}$ lo cual supondría la descripción de una trayectoria parabólica, tal como se sugiere en e.

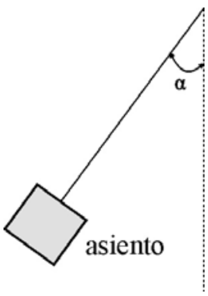


2.6.9. Sabiendo que la máxima aceleración que aguanta el organismo humano en condiciones normales es de 9g, la máxima velocidad con la que puede salir de un rizo de 500 m de radio, un piloto de acrobacia aérea, será aproximadamente en m/s:

Tómese $g=10\frac{m}{s^2}$

a) 100 b) 212 c) 300
d) 400 e) NINGUNO DE ESTOS VALORES

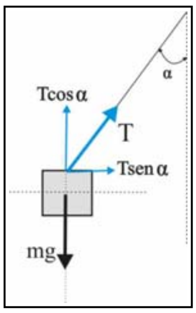
SOL:
Como deberán compensarse la aceleración normal, con la máxima gravedad que aguanta el organismo humano, $|\vec{a}_N|=\frac{|\vec{v}|^2}{R}=9g$. $|\vec{v}|=\sqrt{9g\cdot R}=212\frac{m}{s}$.
La solución correcta es la b.

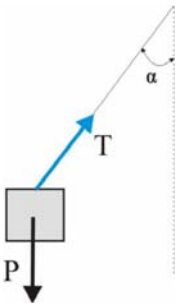


2.6.10. En una atracción de feria existen asientos colgados por cadenas de una plataforma giratoria. Si esta se mueve con velocidad angular constante, se observa que los asientos se desplazan hacia afuera formando con la vertical un ángulo de:

a) $\frac{\omega R}{g}$ b) $\frac{\omega^2 R}{g}$ c) $\frac{\omega R^2}{g}$ d) ωRg

SOL:
Las fuerzas que actúan sobre cada uno de los asientos, para un observador inercial situado fuera de los asientos, son las indicadas en la siguiente figura:





La componente $T\cos\alpha$ constituye la fuerza centrípeta necesaria para que la masa de vueltas. Respecto al eje vertical no hay cambio del ángulo, por consiguiente:

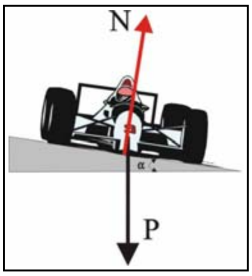
$T\operatorname{sen}\alpha=mv^2/R=m\omega^2R$; $T\cos\alpha=mg$; dividiendo una por la otra resulta:

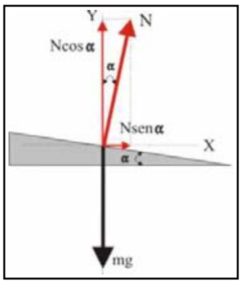
$\tan\alpha=m\omega^2R/mg=\omega^2R/g$ que coincide con la propuesta b

2.6.11. Si prescindimos del rozamiento, la velocidad máxima para tomar correctamente una curva peraltada es:

a) $\sqrt{Rg\tan\alpha}$ b) $\sqrt{Rgsen\alpha}$ c) $\sqrt{\dfrac{Rg}{sen\alpha}}$ d) $\sqrt{\dfrac{Rg}{\tan\alpha}}$

SOL:
Las fuerzas que actúan sobre el móvil están indicadas en las figuras:

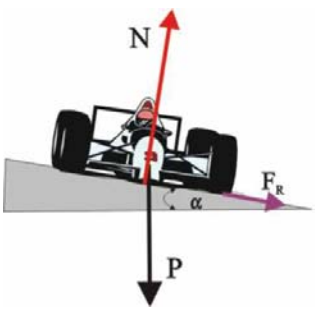




La fuerza N se ha descompuesto en dos direcciones, una horizontal dirigida hacia el centro de la curva y otra en dirección vertical. La fuerza centrípeta que recibe es Nsen α

Nsen α = mv^2/R y Ncos α =mg; de ambas ecuaciones resulta:

tan α = (mv^2/R)/mg= v^2/Rg; v=$\sqrt{Rg\tan\alpha}$ que coincide con la propuesta a

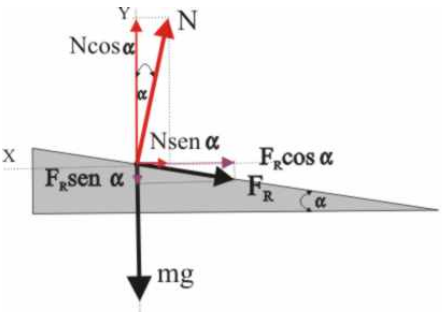


2.6.12. Para una curva peraltada y con coeficiente de rozamiento μ entre el móvil y el suelo la velocidad máxima para tomar correctamente la curva es:

a) $\sqrt{Rg\tan\alpha}$ b) $\sqrt{\dfrac{Rg(sen\alpha+\mu\cos\alpha)}{\tan\alpha}}$

c) $\sqrt{\dfrac{Rg(\,sen\,\alpha+\mu\cos\alpha\,)}{\cos\alpha-\mu\,sen\,\alpha}}$ d) $\sqrt{\dfrac{Rg}{\tan\alpha}}$

SOL:
En el primer dibujo están representadas las fuerzas que un observador inercial ve actuando sobre el móvil que toma la curva y en el segundo, alguna de las fuerzas se ha descompuesto en dos componentes, una vertical y otra dirigida hacia el centro de la curva. De la segunda ley de la Dinámica:



La fuerza centrípeta disponible para tomar la curva es: Nsen α +$F_R$cos α = mv^2/R
En cuanto a la dirección vertical, la suma de fuerzas es igual a cero y se cumple que P+$F_R$sen α =Ncos α
F_R= μ N que se puede sustituir en las dos ecuaciones anteriores:

Nsen α + μ Ncos α =mv^2/R; mg+ μ Nsen α =Ncos α

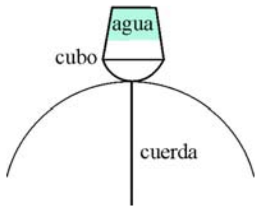
N(sen α + μ cosα)=mv^2/R; N(cos α - μ sen α)=mg

(mv^2/R)/mg= (sen α + μ cos α /(cos α - μ sen α)

v^2/Rg= (sen α + μ cosα)/(cos α - μ sen α)

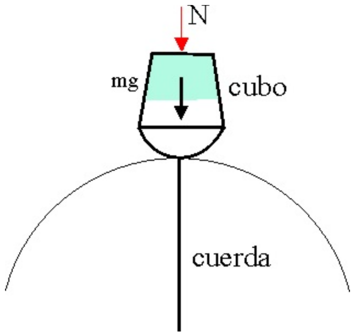
Si de la última expresión despejamos la velocidad, resulta:

$$v=\sqrt{\frac{Rg(\,sen\,\alpha+\mu\cos\alpha\,)}{\cos\alpha-\mu\,sen\,\alpha}}$$ que coincide con la propuesta c.



2.6.13. En un cubo se añade un litro de agua y se voltea el cubo describiendo una circunferencia de radio R, en un plano vertical a tal velocidad que el agua, al pasar el cubo por la parte superior, no cae. La velocidad del cubo debe ser mayor que:

a) $\sqrt{Rg}$ b) $\sqrt{R^2g}$ c) $\sqrt{2Rg}$ d) $\sqrt{5Rg}$



SOL:

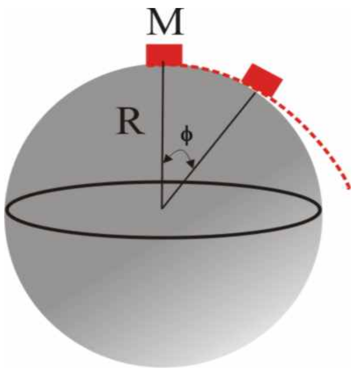
Las fuerzas que actúan sobre el agua contenida en el cubo, vistas desde un observador inercial y tal como se muestran en el dibujo adjunto son:

P es el peso del agua y la fuerza de reacción N con la que el suelo del cubo empuja al agua. Ambas fuerzas proporcionan la fuerza centrípeta necesaria para que el agua describa la circunferencia, esto es:

$P+N = mv^2/R$

En la expresión anterior la masa del agua y el radio son constantes. El valor de N viene condicionado por el valor de v, de manera que si v crece también tiene que hacerlo N y si decrece, también disminuye N. Existe un mínimo valor de la velocidad que hace a N nulo, para este caso, la fuerza centrípeta sólo la proporciona el peso del agua, por encima de esta velocidad límite N tiene un cierto valor tanto mayor cuanto mayor sea v. En esa condición límite

$P= mg= mv^2/R$; $v=\sqrt{Rg}$ como se expone en la propuesta a



2.6.14. En lo alto de una esfera de radio R está situado un pequeño objeto M, el cual comienza a deslizar, sin rozamiento, por la misma hasta que en un determinado punto se separa de ella. Esto ocurre cuando el $\cos\phi$ es igual a:

a) 1/3 b) 2/3 c) 1/4 d) 1/2

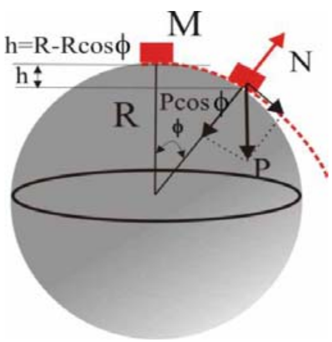
SOL:

Para un observador inercial situado en el centro de la esfera, las fuerzas que actúan sobre la masa que desliza, son su peso P y la reacción de la esfera N.

El peso P lo podemos descomponer en la dirección del radio y en la dirección de la tangente tal como muestra el dibujo adjunto. El cuerpo al describir una circunferencia necesita una fuerza centrípeta que es proporcionada por la resultante de la componente del peso y N, de modo que:

$$P\cos\alpha - N= mv^2/R$$

El ángulo ϕ inicialmente vale cero y cuando el cuerpo M se desprende de la esfera, vale ϕ. La velocidad del cuerpo M comienza siendo cero y luego aumenta progresivamente debido a que el cuerpo pierde energía potencial que convierte en cinética. La separación del cuerpo M de la esfera se produce cuando la reacción N se hace cero y entonces el ángulo adquiere el valor ϕ y en ese momento la velocidad que tiene el cuerpo es debida a la pérdida de energía potencial por descender la altura h.



La energía potencial perdida es mgh= $mgR(1-\cos\phi)$, dicha energía aparece como cinética:

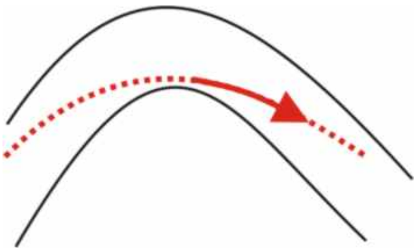
$mgR(1-\cos\phi)= 1/2mv^2$; $v^2= 2mgR(1-\cos\phi)$

Cuando N se hace cero:

$P\cos\phi = mv^2/R$ y sustituyendo el valor de la velocidad:

$mg\cos\phi = m/R[2gR(1-\cos\phi)]$; $\cos\phi = 2-2\cos\phi$; $\cos\phi = 2/3$.

Es correcta la propuesta b

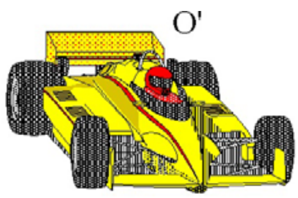


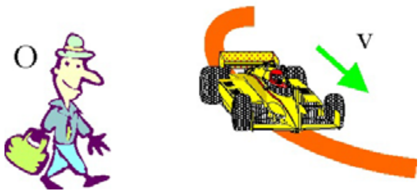
2.6.15. En una carrera de fórmula 1, los pilotos al dar cierta curva, describen la trayectoria indicada puesto que:

a) TIENE MAYOR ACELERACIÓN CENTRÍPETA, EVITANDO DERRAPAR
b) ES LA MÁS CORTA, ECONOMIZANDO COMBUSTIBLE
c) AL TENER MAYOR RADIO, LE PERMITE DARLA CON MÁS VELOCIDAD
d) ES LA DE MENOR RADIO Y DE ESA FORMA LA ACELERACIÓN CENTRÍPETA ES LO MENOR POSIBLE
e) ES LA MÁS CORTA, Y POR ESO DE MENOR ROZAMIENTO, ECONOMIZANDO LOS NEUMÁTICOS

SOL:

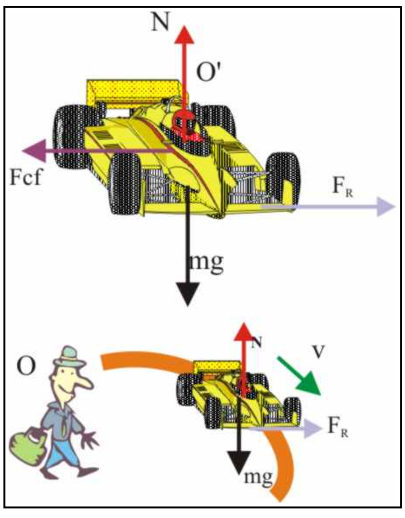
Es evidente que al margen de la economía de combustible y neumáticos que el piloto de fórmula 1 debe tener presente, que evidente corresponde a la trayectoria acortada, ésta, al tener mayor radio de curvatura, para una misma aceleración centrípeta $\left|\vec{a}_N\right| = \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{R}$ permite una mayor velocidad $v = \sqrt{a_N R}$, con lo cual no necesitará frenar tanto, como si la curva fuera más cerrada. La respuesta correcta es la c.





2.6.16. Cuando un vehículo de masa m, toma una curva de radio R, con rozamiento sobre una carretera horizontal, dos observadores, O' (dentro del vehículo) y O (fuera del mismo), se hacen las siguientes reflexiones:

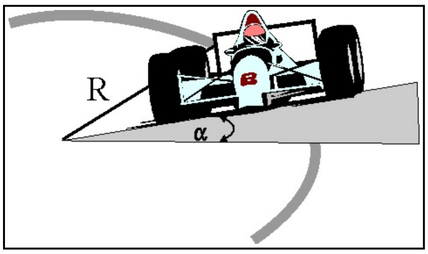
a) O': "ACTÚAN SOBRE MI VEHÍCULO APARTE DE LA FUERZA DE TRACCIÓN DEL MOTOR, TRES FUERZAS: UNA INERCIAL, EL PESO Y UNA REACCIÓN"
b) O: "EL MENOR COEFICIENTE DE ROZAMIENTO μ QUE TIENE QUE LLEVAR ESE VEHICULO PARA NO DERRAPAR DEBERÁ SER IGUAL A v^2/Rg"
c) O': "LA FUERZA CENTRÍFUGA QUE ACTÚA SOBRE EL VEHÍCULO VALDRÁ mv^2/R"
d) O: "LA FUERZA CENTRÍPETA QUE SE EJERCE SERÁ μ mg"
e) O': "LA MÁXIMA VELOCIDAD QUE PUEDO LLEVAR CON MI VEHÍCULO ES DE $\sqrt{\mu R g}$ m/s"



SOL:

El observador no inercial (dentro del vehículo), supone su estado de equilibrio dentro del vehículo debido a la acción de la reacción del suelo, la fuerza de rozamiento, el peso y la fuerza centrífuga al estar el vehículo dando una curva. En ese sistema, en la dirección perpendicular al eje de la curva la fuerza centrífuga $-m\frac{\left|\vec{v}\right|^2}{R}\vec{u}_N$ deberá equilibrarse con la fuerza de rozamiento de módulo $\left|\vec{F}_R\right| = \mu$ N= μ mg. De esa forma resulta, $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\mu R g}$ m/s. Las propuestas a, c,y e, serán correctas.

El observador inercial, observa el vehículo desde fuera, debiendo llegar a los mismos resultados que el no inercial. Al describir una curva, el vehículo llevará una fuerza centrípeta o normal, proporcionada por la fuerza de rozamiento $m\frac{\left|\vec{v}\right|^2}{R} = \mu m g$; $\mu = \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{Rg}$. Por ello las respuestas b y d, también son correctas.



2.6.17. En un autódromo, cualquier piloto al dar una curva de radio R con un cierto ángulo de peralte α debe saber que:

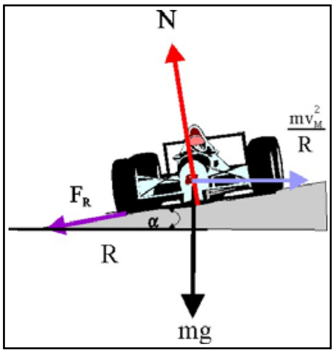
a) LA VELOCIDAD MÁXIMA QUE PUEDE LLEVAR EN LA CURVA ES DE $\sqrt{\dfrac{Rg(1+\tan\alpha)}{1-\mu\tan\alpha}}$

b) SI LA VELOCIDAD ES PEQUEÑA, DESLIZARÁ HACIA DENTRO DE LA CURVA

c) LA VELOCIDAD MÍNIMA ES CERO SI EL ÁNGULO α ES DE 45°

d) LA VELOCIDAD MÁXIMA ES $(\tan\alpha -1)/(\mu\cdot\tan\alpha +1)$ VECES LA MÍNIMA

e) LA VELOCIDAD MÍNIMA AUMENTA CON LA LLUVIA AL CONTRARIO DE LA MÁXIMA

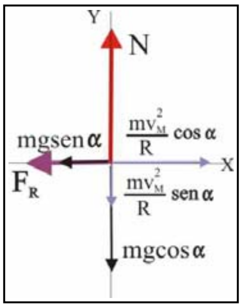


SOL:

El vehículo describiendo una curva tal como indica el esquema, está sometido a las siguientes fuerzas. Considerado unos ejes en el vehículo es un sistema no inercial por tener aceleración centrípeta. Las fuerzas que actúan son:

El peso m**g**, la **F**i (fuerza centrífuga) = mv_M^2/R, ambas aplicadas en el c.d.m. La reacción de la pista **N**, perpendicular a ella, y la fuerza de rozamiento = μ N, con sentido contrario al de deslizamiento.

Descomponiendo las fuerzas en un sistema (X,Y) con dos ejes, uno paralelo y otro perpendicular al eje de la pista, actúan las siguientes componentes:



Sobre el eje X, $mg\text{sen}\,\alpha + F_R = mv_M^2\cos\alpha/R$. (I)

Sobre el eje Y, $N = mv_M^2\text{sen}\,\alpha/R + mg\cos\alpha$

Como $F_R = \mu N = \mu(mv_M^2\text{sen}\,\alpha/R + mg\cos\alpha)$

Sustituyendo en (I) : $mg\text{sen}\,\alpha + \mu\,(mv_M^2\text{sen}\,\alpha/R + mg\cos\alpha) = mv_M^2\cos\alpha/R$.

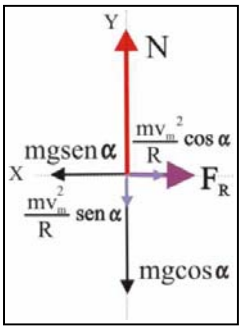
Dividiendo por $\cos\alpha$ y simplificando:

$g\tan\alpha + \mu\,(v_M^2\tan\alpha/R + g) = v_M^2/R$.

$(v_M^2/R)(1-\mu\tan\alpha) = g(\tan\alpha + \mu)$. De lo que, despejando v_M

$$v_M = \sqrt{\frac{Rg(\mu+\tan\alpha)}{1-\mu\tan\alpha}}$$ (II), que no coincide con la propuesta a.

Cuando la velocidad es mínima, el vehículo tiende a derrapar hacia el centro de la curva, y por lo tanto la fuerza de rozamiento tendrá sentido contrario. Por lo tanto:



Sobre el eje X, $mg\text{sen}\,\alpha = mv_m^2\cos\alpha/R + F_R$

Sobre el eje Y, $N = mv_m^2\text{sen}\,\alpha/R + mg\cos\alpha$ .Calculando F_R como en el caso anterior, simplificando y sustituyendo se llega a una expresión:

$g\text{sen}\,\alpha = v_m^2\cos\alpha/R + \mu\,(v_m^2\text{sen}\,\alpha/R + g\cos\alpha)$. Dividiendo por $\cos\alpha$

$g\tan\alpha = \mu\,(v_m^2\tan\alpha/R + g) + v_m^2/R$; $(v_m^2/R)(1+\mu\tan\alpha) = g(\tan\alpha - \mu)$;

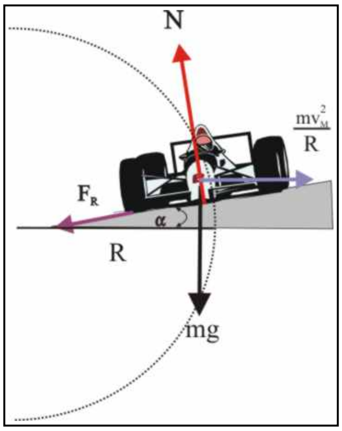
$$v_m = \sqrt{\frac{Rg(\tan\alpha-\mu)}{1+\mu\tan\alpha}}$$ (III).Si se sustituye $\alpha = 45°$, $v_m = \sqrt{\dfrac{Rg(1-\mu)}{1+\mu}} \neq 0$,

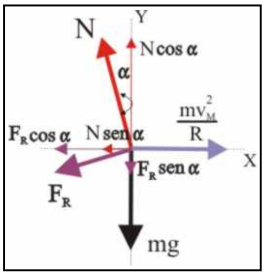
Si se divide (II) por (III), $\dfrac{v_M}{v_m} = \sqrt{\dfrac{(\tan\alpha+\mu)(1+\mu\tan\alpha)}{(\tan\alpha-\mu)(1-\mu\tan\alpha)}}$ (IV), que tampoco corresponde a la propuesta d.

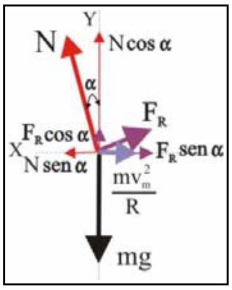
Si el piso está mojado μ disminuye, y por lo tanto para un mismo ángulo de peralte, aplicando las fórmulas (II) y (III), tendremos:

Para v_M, el denominador de la expresión aumenta ($\mu\tan\alpha$ es menor), mientras que el numerador disminuye, por lo que v_M deberá disminuir.

Para v_m, el numerador aumenta (μ menor),y el denominador se hace ligeramente inferior, por lo cual la v_m deberá aumentar, como indica la respuesta e.







2.6.18. En un circuito de carreras, con un peralte en curva de $45°$, y coeficiente de rozamiento 0,2 la relación entre las velocidades máximas y mínimas que puede emplear un piloto, para dar con seguridad una curva de radio R, deberá ser de:

a) 2 b) 1,5 c) 1,25

d) 2,5 e) NADA DE LO DICHO

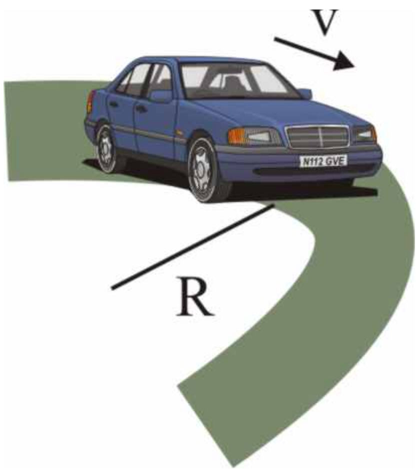
SOL:

El estudio de las fuerzas que actúan en un referencial diferente al de la cuestión anterior, permite la descomposición de las fuerzas para velocidades máximas (v_M) y mínimas (v_m). Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el eje X, y calculando las fuerzas de rozamiento a partir del equilibrio en el eje Y, despejando las velocidades y dividiéndolas se llega a una fórmula idéntica a la IV de la 2.6.17.

Empleando la fórmula (IV), de la cuestión anterior:

$$\frac{v_M}{v_m} = \sqrt{\frac{(\tan\alpha + \mu)(1+\mu\tan\alpha)}{(\tan\alpha - \mu)(1-\mu\tan\alpha)}}$$

y sustituyendo los valores de α y coeficiente de rozamiento =0,2, tendremos que dicha relación será: [(1,2).(1,2)]/[(0,8)(0,8)]=1,5. La solución correcta es la b.



2.6.19* En el mantenimiento del coche familiar se recomienda que periódicamente se intercambien las ruedas, para que su desgaste sea lo más uniforme. Si en un recorrido habitual das una curva sin peralte tal como se indica, dirás que el desgaste de las ruedas:

a) ES MAYOR EN LAS DE AFUERA

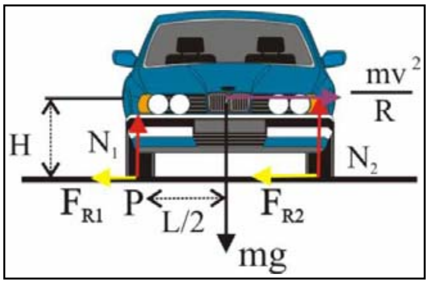
b) ES MAYOR EN LAS INTERIORES

c) DEPENDE DE LA VELOCIDAD CON QUE LA TOMES

d) ES MENOR CUANTO MÁS BAJO Y ANCHO SEA EL VEHÍCULO

e) SÓLO DEPENDE DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO

SOL:



En el esquema de la figura y siendo L el ancho del vehículo y H su altura desde el centro de masas al suelo, se representan las fuerzas que actúan en el sistema de referencia del vehículo. Las normales en las ruedas externas e internas N_1 y N_2, y las fuerzas de rozamiento respectivas $\mathbf{F_{R1}}=-\mu N_1\ \mathbf{i}$ (I) y $\mathbf{F_{R2}}=-\mu N_2\ \mathbf{i}$ (II) , el peso $-mg\ \mathbf{j}$, y la fuerza centrífuga $mv^2/R\ \mathbf{i}$. El equilibrio de fuerzas implica que para una velocidad máxima v_M:

Sobre el eje Y: $N_1+N_2-mg=0$ (III). Sobre el eje X: $mv^2_M/R - \mu N_1 - \mu N_2 = 0$

Para que no vuelque el vehículo. La suma de momentos deberá ser 0. Si se toman respecto al punto P:

$(-L/2)\ mg + LN_2 - H\ mv^2_M/R = 0$. De lo que $N_2 = mg/2 + H\ mv^2_M/RL$.

Llevando este valor a (III). $N_1 = mg/2 - H\ mv^2_M/RL$, por lo que las fuerzas de rozamiento sobre las ruedas exteriores e interiores serán respectivamente:

$\mathbf{F_{R2}} = -\mu\ (mg/2 + H\ mv^2_M/RL)\ \mathbf{i}$ y $\mathbf{F_{R1}} = -\mu\ (mg/2 - H\ mv^2_M/RL)\ \mathbf{i}$

Al ser $F_{R2} > F_{R1}$, se gastarán más las ruedas exteriores. Como la diferencia de desgaste será proporcional a la diferencia entre dichas fuerzas:

$F_{R2}-F_{R1} = 2\mu H mv^2_M/RL$, y en función de esta expresión sólo serán correctas las propuestas a, c y d.