3.DINÁMICA DE LOS SISTEMAS DE PUNTOS

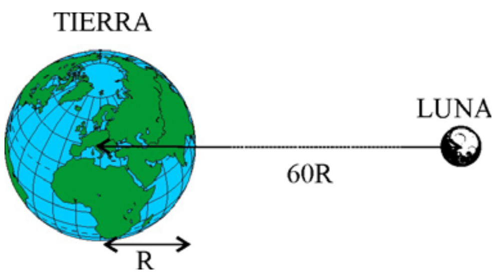
3.1. Centro de masas. Determinación
3.2. Movimiento del centro de masas.
3.3. Cantidad de movimiento. Conservación de la cantidad de movimiento
3.4. Sistema de referencia del centro de masas
3.5. Choque
3.6. Conservación del momento angular.

3.1. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASAS

3.1.1.* El centro de masas de un cuerpo o de un sistema de puntos materiales, es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Suele identificarse generalmente con el centro de gravedad del cuerpo, pero esto sólo ocurre cuando:

a) EL CUERPO ES UN SÓLIDO HOMOGÉNEO
b) LAS FUERZAS EXTERIORES SON PRODUCIDAS POR EL CAMPO GRAVITATORIO
c) EL CUERPO NO ES EXCESIVAMENTE EXTENSO
d) SIEMPRE COINCIDE CON EL CENTRO DE GRAVEDAD
e) LOS PUNTOS MATERIALES TIENEN TODOS LA MISMA MASA

SOL:
El centro de masas de un sistema de puntos materiales es el punto donde se debe aplicar la resultante de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Si las fuerzas exteriores que actúan sobre los puntos son únicamente debidas al campo gravitatorio, y el cuerpo no es excesivamente extenso de forma que se puedan considerar como fuerzas paralelas actuando sobre todos los puntos del sistema, o del cuerpo, y dirigidas hacia el centro de la Tierra, en éste caso coincidirá con el centro de gravedad.
En definitiva coincidirán cuando las fuerza exteriores sean las debidas a un campo gravitatorio uniforme, lo cual exige que el cuerpo no sea extenso. Las opciones correctas son b y c.



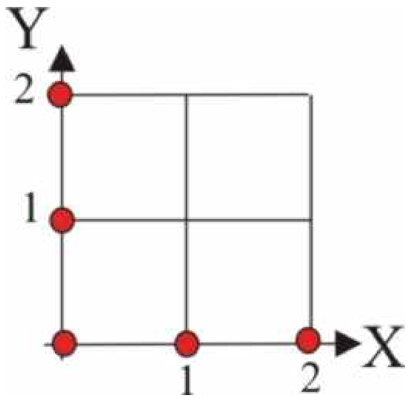
3.1.2. La masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna y la distancia entre sus centros es sesenta radios terrestres (60 R). El centro de masas del sistema Tierra-Luna ocupa una posición que está:

a) POR ENCIMA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE
b) POR DEBAJO DE LA SUPERFICIE TERRESTRE
c) A LA MITAD DE LA DISTANCIA ENTRE AMBOS CUERPOS CELESTES
d) INDETERMINADA, YA QUE DEPENDE DE LAS FASES DE LA LUNA

SOL:
Imaginemos una recta que une los centros de la Tierra y la Luna y situemos el origen en el centro de la Tierra; la posición del centro de masas es: $x_{CM} = \dfrac{\Sigma M_i x_i}{\Sigma M_i}$, de lo que

$$x_{CM} = \frac{M_T .0 + M_L .60R}{M_T + M_L} = \frac{M_L .60R}{81M_L + M_L} = 0{,}73R$$

el valor numérico anterior indica que el centro de masas dista del centro de la Tierra una distancia que es inferior al radio terrestre, por lo que la solución correcta de la prueba es la opción <u>b</u>.



3.1.3. El centro de masas de un sistema formado por cinco masas puntuales iguales colocadas en la forma que indica la figura, está en la bisectriz del ángulo y a una distancia del vértice de:

a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{8\sqrt{2}}{5}$

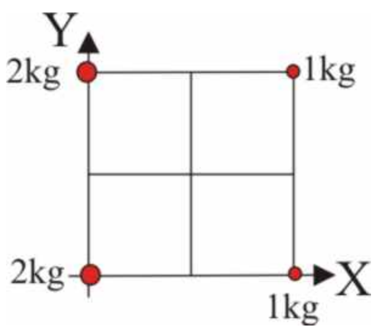
SOL:

Los vectores de posición de las cinco masas son 0**i**, **i**, 2**i**, **j**, 2**j** y el vector centro de masas es: $\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i}$, de lo que

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m.0\vec{i} + m.\vec{i} + m.2\vec{i} + m.\vec{j} + m.2\vec{j}}{5m} = \frac{3\vec{i}}{5} + \frac{3\vec{j}}{5}$$

La distancia al origen de coordenadas es el módulo del vector de posición

$$d = |\vec{r}_{CM}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{5} \text{ m}$$

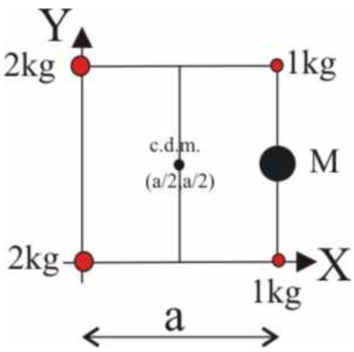


3.1.4. En los vértices de un cuadrado de lado a se sitúan cuatro masas tal como indica la figura. Si en el medio de la recta que une las masas de 1 kg se sitúa una masa de M kilos, resulta que el centro de masas del sistema formado está en el centro de dicho cuadrado, por tanto el valor de M es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

SOL:

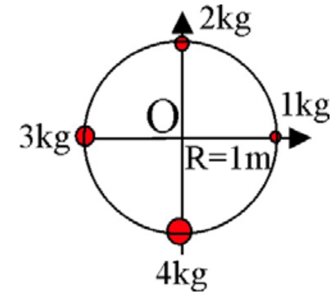
El centro de masas está en el punto de coordenadas (a/2, a/2) y el correspondiente vector de posición es: $\vec{r}_{CM} = \frac{a\vec{i}}{2} + \frac{a\vec{j}}{2}$ y aplicando la fórmula



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i}, \quad \frac{1.a\vec{i} + 1.a\vec{i} + M.a\vec{i} + 2.a\vec{j} + 1.a\vec{j} + M.\frac{a\vec{j}}{2}}{M+6} = \frac{a\vec{i}}{2} + \frac{a\vec{j}}{2} =$$

$$= \frac{(2.a + Ma)\vec{i} + (3a + M.\frac{a}{2})\vec{j}}{M+6},$$ de donde a/2= (2a+Ma)/(M+6); M= 2kg

La cuestión se puede resolver rápidamente si observamos que las dos masas de 2 kg equivalen a una de cuatro en el punto de coordenadas (0, a/2) y que las otras tres masas (1+1+M) tienen su centro de masas en el punto (a, a/2) y para que el conjunto de las cinco masas esté en el centro M debe ser 2 kg ya que 4= 1+1+M. La solución correcta será la <u>b</u>.



3.1.5. Cuatro masas puntuales de 1, 2, 3 y 4 kg respectivamente están situadas sobre una circunferencia de radio unidad tal como indica la figura.

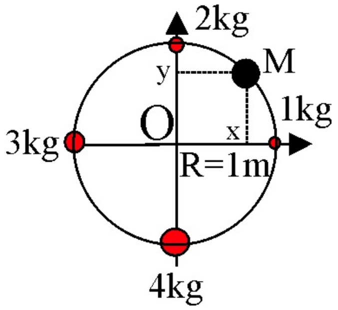
Se añade una quinta masa M, en un lugar de la circunferencia de modo que el centro de masas de todo el sistema se encuentre en el punto O. El valor de la masa añadida M, expresada en kilogramos, es:

a) $2\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{2}$ c) 6 d) $8\sqrt{2}/3$

y las coordenadas del lugar que ocupa M son:

a) $1, \frac{1}{\sqrt{2}})$ b) $\frac{\sqrt{2}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{9}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$

SOL:



Designamos con M la masa añadida, siendo sus coordenadas de posición (x, y). Teniendo presente que el radio de la circunferencia es 1, se cumple que $x^2+y^2=1$.

El centro de masas del sistema está en O, por tanto $\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i} = 0$

$$\frac{1.\vec{i} - 3.a\vec{i} + M.x\vec{i} + 2.\vec{j} - 4.\vec{j} + M.y\,\vec{j}}{M+10} = 0, \quad \frac{(-2+Mx)\vec{i} + (-2+M\,y)\vec{j}}{M+10} = 0;$$

$$-2 + \frac{M\sqrt{2}}{2} = 0; \; x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-2 + Mx = 0$$
$$-2 + My = 0$$

x=y , como $x^2 + y^2 = 1$. Se deduce que

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$, sustituyendo el valor de x

$$-2 + M\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow M = 2\sqrt{2}\,kg$$

Las soluciones correctas serán la a en la primera, y la c, en la segunda.

3.1.6. El lugar geométrico del centro de masas de todos los sistemas formados por dos puntos materiales de masas m y 2m situados respectivamente sobre los ejes X e Y y a igual distancia del origen, deberá ser:

a) LA RECTA BISECTRIZ
b) LA RECTA DE ECUACIÓN y=2x
c) UNA RECTA DE ECUACIÓN y=2x/3
d) UNA RECTA DE ECUACIÓN y=3x/2
e) NADA DE LO DICHO

SOL:

Aplicando la definición de vector de posición del centro de masas:

$\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i}$ y considerando la masa m, con vector de posición $\vec{r}_1 = a\,\vec{i}$,

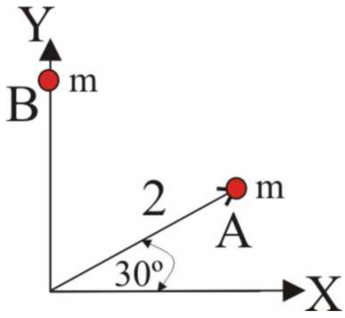
mientras que el de la masa 2m, es $\vec{r}_2 = a\,\vec{j}$, el vector de posición del centro de masas del sistema será:

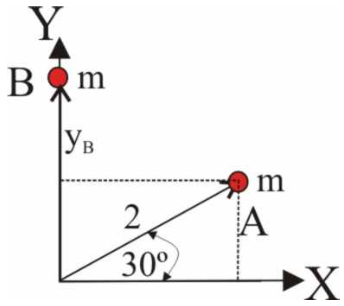
$$\vec{r}_{CM} = \frac{m.a\vec{i} + 2m.a\vec{j}}{m+2m} = \frac{a\vec{i}}{3} + \frac{2a\vec{j}}{3}.$$

y sus componentes serán : x=a/3 , y=2a/3 .

Eliminado a entre ambas, tendremos que : y=2x

Esta ecuación será el lugar geométrico del centro de masas del sistema, para cualquier valor de a, lo que corresponde a la propuesta b.





3.1.7. Dos puntos materiales A y B de masas iguales están situados en el plano XY. A viene determinado por un vector de posición cuyo módulo vale 2 y forma un ángulo de 30 grados con el eje X, mientras que B se puede encontrar en cualquier punto del eje Y. Por ello dirás que el lugar geométrico de las posiciones del centro de masas del sistema deberá ser:

a) UNA RECTA QUE PASA POR EL PUNTO 0,0 CON PENDIENTE 2/3
b) UNA RECTA PARALELA AL EJE Y
c) UNA CIRCUNFERENCIA
d) UNA PARÁBOLA
e) NADA DE LO DICHO

SOL:

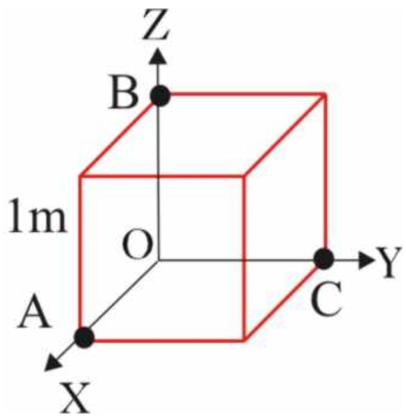
Consideramos los vectores de posición de A ,

$\vec{r}_A = 2\cos 30° \,\vec{i} + 2 sen 30° \,\vec{j} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{r}_B = y_B\,\vec{j}$

Aplicando las propiedades del centro de masas del sistema, su vector de posición:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m\sqrt{3}\,\vec{i} + (m + m\,y_B)}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1+y_B}{2}\vec{j}$$

En consecuencia, el c.d.m.del sistema, estará en una recta que corta al eje X, en el punto $\frac{\sqrt{3}}{2}$,paralela al eje Y, y cuya coordenada y será ($0{,}5+0{,}5y_B$), tal como indica la solución b, excluyéndose todas las demás propuestas.



3.1.8. En los vértices A, B y C del cubo de lado 1m de la figura, se encuentran tres masas iguales, m. Por lo tanto el centro de masas de la figura deberá estar en:

a) EL CENTRO DE LA DIAGONAL DE LA CARA SUPERIOR
b) EL CENTRO DE CUALQUIER DIAGONAL DEL CUBO
c) EL CENTRO DE LA DIAGONAL DE LA BASE DEL CUBO
d) UNA PERPENDICULAR AL CENTRO DE LA BASE DEL CUBO
e) EL PUNTO (1/3, 1/3, 1/3)

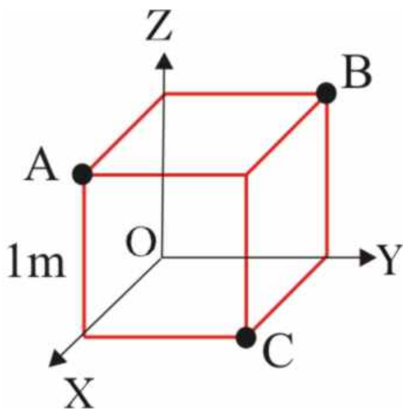
SOL:

Observando el esquema de la figura, las posiciones de las masas situadas en los vértices A, B, y C, serán respectivamente: A(1,0,0) , B(0,0,1) y C (0,1,0).Por lo tanto el vector de posición del centro de masas del sistema $m_A + m_B + m_C$, será :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m.\vec{i} + m.\vec{j} + m.\vec{k}}{3m} = \frac{\vec{i}}{3} + \frac{\vec{j}}{3} + \frac{\vec{k}}{3}$$

Sólo será correcta la solución e, puesto que el centro de la diagonal de la cara superior del cubo (propuesta a),sería el centro del cuadrado, que tendría por coordenadas (1/2, 1/2, 1),mientras que el de la cara opuesta(diagonal de la base del cubo y propuesta c),sería el punto (1/2, 1/2,0).

El centro de cualquier diagonal del cubo (propuesta b) correspondería a un punto de coordenada z=1/2,y por lo tanto no puede corresponder al dado, mientras que cualquier punto de la perpendicular a la base del cubo tendría las mismas coordenadas x e y ,esto es (1/2,1/2).



3.1.9. En los vértices A, B y C del cubo de lado 1m de la figura, se encuentran tres masas, m, 2m y 3m, respectivamente. Por lo tanto el centro de masas de la figura deberá tener como vector de posición **r**:

a) $\frac{3\vec{i}}{6}+\frac{4\vec{j}}{6}+\frac{5\vec{k}}{6}$ b) $\frac{2\vec{i}}{3}+\frac{5\vec{j}}{6}+\frac{\vec{k}}{2}$ c) $\frac{5\vec{i}}{6}+\frac{4\vec{j}}{6}+\frac{3\vec{k}}{6}$

d) UN VECTOR CUYAS COMPONENTES X,Y,Z SEAN UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA CUYO PRIMER TÉRMINO SEA 3/6, Y RAZÓN 1/6

e) NADA DE LO DICHO

SOL:

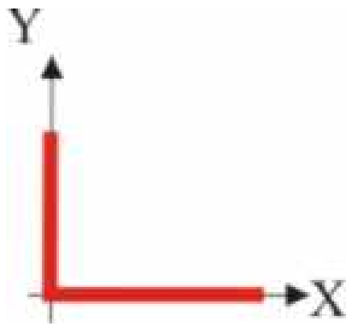
Observando el esquema dado, los vectores de posición de las masas situadas en A, B y C serán respectivamente $\vec{r}_A=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{r}_B=\vec{j}+\vec{k}$ y $\vec{r}_C=\vec{i}+\vec{j}$ **.**

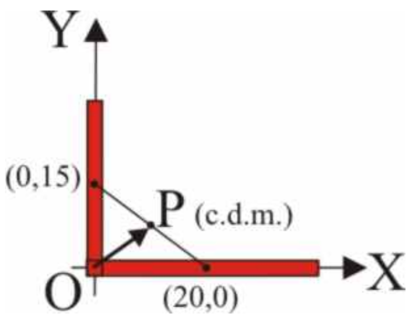
Por lo tanto el vector de posición del centro de masas del sistema, $m_A + m_B + m_C$, será :

$$\vec{r}_{CM}=\frac{m.(\vec{i}+\vec{k})+2m.(\vec{j}+\vec{k})+3m.(\vec{i}+\vec{j})}{6m}=\frac{2\vec{i}}{3}+\frac{5\vec{j}}{6}+\frac{\vec{k}}{2}m,$$ que coincide únicamente con la propuesta b.

La progresión aritmética implicaría un punto con coordenadas:

(3/6 ,4/6, 5/6),y precisamente este orden no se sigue en el c.d.m. de la figura(4/6,5/6,3/6).





3.1.10. Si tomas un alambre de 70 cm y lo doblas en ángulo recto de forma que uno de los lados sea de 30cm, dirás que el centro de masas de la figura formada se encuentra en:

a) LA BISECTRIZ DEL ÁNGULO RECTO

b) EL VÉRTICE DEL ÁNGULO RECTO

c) EL PUNTO MEDIO DE LA RECTA QUE UNE LOS DOS EXTREMOS

d) LA RECTA QUE UNE LOS PUNTOS MEDIOS DE LOS DOS LADOS, A 14,3 cm DEL DE 30 cm.

SOL:

En el esquema de la figura se observa que al doblarse en ángulo recto, podremos tomar dos porciones de alambre A (la pequeña de 30cm) y B(la grande de 40cm), y determinar el centro de masas del sistema formado por A y B, en el sistema de referencia X/Y, dado.

La masa de cada porción será =la densidad lineal de masa, λ por la longitud correspondiente, supuesto que sea homogéneo. Así:

En A : $\vec{r}_A=15\vec{j}$, $m_A = 30\,\lambda$ y En B : $\vec{r}_B=20\vec{i}$, $m_B= 40\,\lambda$

Por lo que $\vec{r}_{CM}=\frac{40\lambda.20\vec{i}+30\lambda.15\vec{j}}{70\lambda}=\frac{80\vec{i}}{7}+\frac{45\vec{j}}{7}$

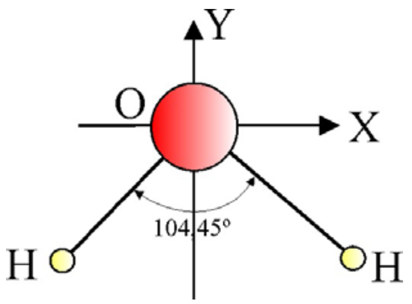
El punto que determina el c.d.m. , P (80/7, 45/7), no va a encontrarse en la bisectriz del ángulo recto, cuya ecuación x=y , no contiene a P.

No puede estar en el vértice del ángulo recto (0,0) ni en el punto medio de la recta que une los dos extremos ($20\vec{i}+15\vec{j}$), que tampoco contiene a P.

La distancia entre P y el punto (0,15), será

$$d=\sqrt{\left(\frac{80}{7}\right)^2+\left(15-\frac{45}{7}\right)^2}=14{,}3\ cm$$

La única propuesta correcta será la d.



3.1.11. En la figura se encuentra una versión simplificada de la molécula de agua. La longitud del enlace O-H es 0,09584 nm y el ángulo de enlace H-O-H 104,45E. El centro de masas de esta molécula respecto a los ejes dibujados están en el eje Y siendo el valor de dicha coordenada expresada en nm:

a) $-6{,}53\cdot10^{-3}$ b) $-4{,}35\cdot10^{-3}$ c) $-3{,}87\cdot10^{-3}$ d) $-2{,}47\cdot10^{-3}$

SOL:

Las coordenadas de posición de los tres átomos que forman la molécula de agua son:

Oxígeno (0, 0)

Hidrógeno (3º cuadrante): -0,09584sen(104, 45/2), -0,09584cos(104,45/2)

Hidrógeno (4º cuadrante): +0,09584sen(104,45/2), -0,09584cos(104,45/2)

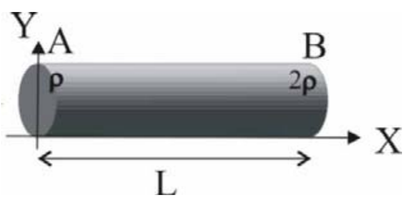
La coordenada Y_{CM} es:

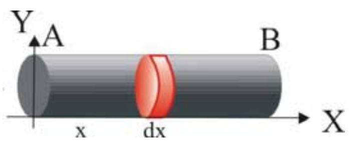
$Y_{CM}=(m_O\cdot 0+m_H(-0{,}09584\cos(104{,}45/2)+ m_H(-0{,}09584\cos(104{,}45/2))/(m_O+2m_H)$

La masa del átomo de oxígeno es aproximadamente 16 veces mayor que la del átomo de hidrógeno, por lo que sustituyendo en la fórmula anterior resulta:

$Y_{CM}=(m_O\cdot0+m_H(-0{,}09584\cos(104{,}45/2)+m_H(-0{,}09584\cos(104{,}45/2))/(m_O+2m_H)=$

$2m_H(-0{,}09584\cos(104{,}45/2))/18m_H= -6{,}53\cdot10^{-3}$nm.Es correcta la propuesta a.





3.1.12. Una barra cilíndrica de longitud L tiene una densidad que no es constante a lo largo de ella, sino que crece linealmente desde un valor ρ en un extremo A hasta 2r en el extremo B. El centro de masas de dicha barra está a una distancia de A igual a:

a) L/2 b) 3L/7 c) 3L/8 d) 5L/8 e) 5L/9

SOL:

Puesto que la densidad de la barra aumenta linealmente de un extremo a otro (en A, ρ y en B, 2ρ), la variación de la densidad por unidad de longitud es ρ/L, por consiguiente la densidad en un lugar que diste x del extremo A vale, la densidad en A más la variación correspondiente, esto es, ρ +(ρ/L)x.

Si consideramos un trocito de barra que tenga por espesor dx, y diste x, del extremo A de la barra, tendrá un volumen Sdx, siendo S la sección normal de la barra. La masa de ese trocito de barra es igual a su volumen por su densidad:

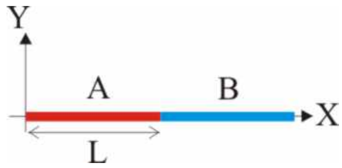
dm= Sdx(ρ + ρ/Lx)

La coordenada x_{CM} considerada a lo largo de la barra es:

$$x_{CM}=\frac{\int_A^B xdm}{\int_A^B dm}\text{, por lo que }\quad x_{CM}=\frac{\int_A^B S\left(\rho+\frac{\rho}{L}x\right)xdx}{\int_A^B S\left(\rho+\frac{\rho}{L}x\right)dx}$$

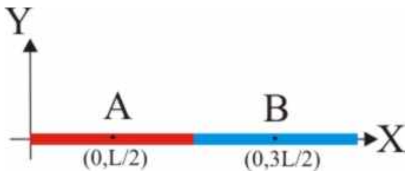
$$x_{CM}=\frac{\int_0^L S\rho\, xdx+\int_0^L S\frac{\rho}{L}x^2dx}{\int_0^L S\left(\frac{\rho}{L}x\right)dx+\int_0^L S\rho dx}=\frac{\rho\frac{L^2}{2}+\rho\frac{L^3}{3L}}{\rho L+\rho\frac{L^2}{2L}}=\frac{5L}{9},$$

tal como se indica en e.



3.1.13. Se sueldan, una a continuación de otra, dos varillas homogéneas A y B de la misma longitud L pero hechas de dos materiales diferentes, siendo la densidad de A doble que la de B. El centro de masas del conjunto se encuentra a una distancia del extremo de A igual a:

a) L/2 b) 3L/7 c) 3L/8 d) 5L/6 e) 5L/9



SOL:

El centro de masas de una barra homogénea se encuentra en el punto medio de la misma. Si tomamos como origen de distancias el extremo libre de la barra A, el centro de masas se encuentra a una distancia L/2. Como la barra B está conectada a continuación de la A y tiene la misma longitud su centro de masas se encuentra a una distancia 3L/2 del extremo libre de la barra A.

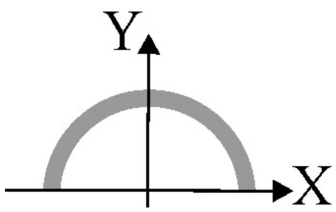
Podemos escribir para la posición del centro de masas del conjunto de las dos barras:

$x_{CM}= (m_A L/2+m_B 3L/2)/(m_A+m_B)$

Como la densidad de la barra A es doble que la de B, se deduce que la masa de la barra A es doble de la de B. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$x_{CM}= (2m_B L/2+m_B 3L/2)/(2m_B+m_B)= (L+3L/2)/3= 5L/6$.

La respuesta correcta es la d.



3.1.14. Con un alambre fino de sección constante se moldea una semicircunferencia de radio R. El centro de masas se encuentra en el eje de simetría a una distancia del centro de la circunferencia a la que pertenece la figura igual a:

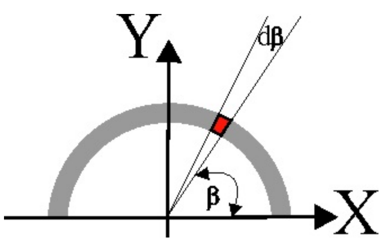
a) R/π b) 2R/π c) R/2π d) R/2

SOL:

Designemos con λ la densidad lineal del alambre fino. Consideremos sobre el mismo un arco infinitesimal que está sustentado por un ángulo dβ.

La masa de ese trocito infinitesimal es dm= densidad · longitud, y la longitud está relacionada con el ángulo mediante la expresión arco= ángulo · radio, por tanto: dm= λ ·R $d\beta$

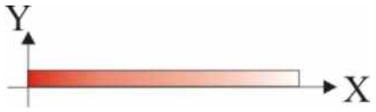
La posición del centro de masas sobre el eje Y es: $y_{CM} = \dfrac{\int_0^\pi y\,dm}{\int_0^\pi dm}$



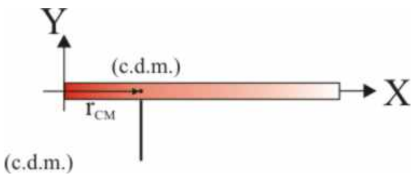
Pero, sen **b**=y/R, despejando y=Rsen**b**, siendo y la ordenada de dm , finalmente,

$$y_{CM} = \frac{\int_0^\pi y\,dm}{\int_0^\pi dm} = \frac{\int_0^\pi \lambda.Rsen\beta.R\,d\beta}{\int_0^\pi R.\lambda d\beta} = R\frac{[-\cos\beta]_0^\pi}{[\beta]_0^\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

La respuesta válida es la b.



3.1.15. Calcular el centro de masas de una varilla de longitud L, no homogénea, cuya densidad lineal varía con la longitud según la relación (4-x/5) kg/m, siendo x la distancia desde el extremo más denso a cualquier punto de la varilla. La densidad lineal mínima de esta varilla es de 2 kg/m. El c.d.m. de la varilla se encuentra a una distancia del extremo de mayor densidad lineal. igual a:
a) 2,2m b) 4,4m c) 6,6m
d) 8,8m e) NINGUNO DE LOS VALORES DADOS



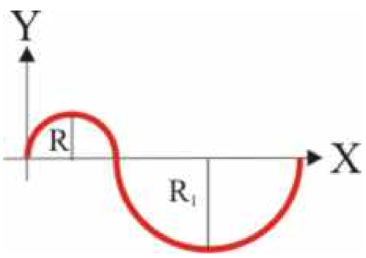
SOL:
La densidad máxima de la varilla se obtiene haciendo x=0, y vale 4 kg/m.
La densidad mínima de dicha varilla se obtiene cuando x=L

$$4-\frac{L}{5}=2 \;\Rightarrow\; L=10\,m$$

Si tomamos un sistema de referencia centrado en el extremo de la barra de mayor densidad, tal como se muestra en el dibujo, en estas condiciones el c.d.m. de la barra, tendrá una coordenada

$$r_{CM}=\frac{\int_0^L x\,dm}{\int_0^L dm}=\frac{\int_0^{10} x\left(4-\frac{x}{5}\right)dx}{\int_0^{10}\left(4-\frac{x}{5}\right)dx}=\left.\frac{2x^2-\frac{x^3}{15}}{4x-\frac{x^2}{10}}\right|_0^{10}=\frac{200-\frac{1000}{15}}{40-10}=4{,}4\,m$$

la propuesta correcta será la b.



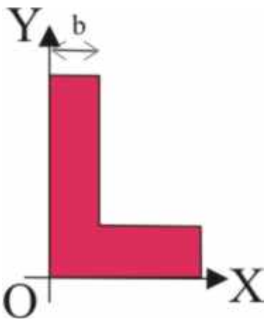
3.1.16. Con un alambre de sección uniforme se moldea una figura formada por dos semicircunferencias de radios R y R_1 siendo R_1=2R, respecto de los ejes dibujados en la figura dada, la coordenada X del centro de masas es:
a) R/2 b) R c) 2R d) 3R e) 4R
y la coordenada Y es:
a) -R/π b) -R/2π c) -2R/π d) -3R/2π
SOL:
Para la semicircunferencia de radio R la abscisa de su centro de masas está en la posición R y para la de radio R_1 está en la posición 2R+R_1= 4R
Si designamos con λ a la densidad del alambre, se deduce que las masas son:
$m_1=\pi R\lambda$ para la figura menor y $m_2=\pi R_1\lambda=2\pi R\lambda$ para la mayor.

$$x_{CM}=\frac{m_1R+m_2 4R}{m_1+m_2}=\frac{\pi R^2\lambda+8\pi R^2\lambda}{3\pi R\lambda}=3R$$

Para calcular la ordenada del centro de masas debemos recordar tal como se hizo en el ejercicio 3.1.14 que su valor es 2Radio/π .
Para la circunferencia menor vale 2R/π y para la mayor -2R_1/π =-4R/π

$$y_{CM}=\frac{m_1\frac{2R}{\pi}-m_2\frac{4R}{\pi}}{m_1+m_2}=\frac{\pi R\lambda\frac{2R}{\pi}-2\pi R\lambda\frac{4R}{\pi}}{3\pi R\lambda}=-\frac{2R}{\pi}$$

soluciones correctas son la d en la primera, y la c, en la segunda.



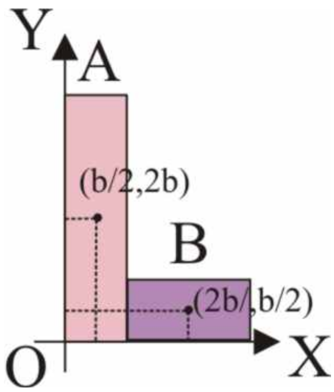
3.1.17. * Como eres muy aficionado a la física, has convertido tu habitación en una especie de laboratorio de mecánica, con construcciones y disposiciones de objetos en raros equilibrios. Para rematarlo decides hacer una L mayúscula recortándola de una cartulina, de forma que su parte vertical sea 4 veces el ancho b, mientras que la base horizontal sólo lo sea 3, y después clavarla por su centro de masas, con una chincheta en el marco de madera. Sin embargo esta operación te va a resultar extremadamente difícil porque:

a) EL EQUILIBRIO ES INDIFERENTE SI SE CLAVA EN CUALQUIER PUNTO DE LA PARTE VERTICAL
b) QUEDARÍA EN EQUILIBRIO EN EL CENTRO DE LA BASE HORIZONTAL
c) EL CENTRO DE MASAS DE LA FIGURA NO ESTÁ DENTRO DE ELLA
d) EN UN SISTEMA DE REFERENCIA CENTRADO EN EL VÉRTICE INFERIOR IZQUIERDA DE LA L, EL CENTRO DE MASAS TENDRÍA UNA POSICIÓN DADA POR EL VECTOR: $\vec{r} = b\vec{i} + 1{,}5b\,\vec{j}$

SOL:

Para que el equilibrio sea estable es necesario que el centro de gravedad de la figura, esté por debajo del punto donde se clave la chincheta. Inestable si lo está por encima, e indiferente si coincide con el c.d.g., por lo tanto es necesario determinar dicho punto. Para ello:

a) Fijamos la L, en un sistema de referencia, centrado en el vértice de la letra, como indica la figura
b) Partimos la letra en dos fragmentos A, vertical y B horizontal de forma que la determinación de sus c.d.m. sea lo más sencilla posible. Considerando que m = superficie por densidad superficial de masa, determinaremos también las masas de A y B.



En A : $\vec{r}_A = \frac{b\vec{i}}{2} + 2b\,\vec{j}$, $\quad m_A = 4b^2\sigma$

En B : $\vec{r}_B = 2b\,\vec{i} + \frac{b\vec{j}}{2}$, $\quad m_B = 2b^2\sigma$

c) Determinamos el centro de masa del sistema formado por las masas de A y B, conociendo éstas y sus respectivos vectores de posición, dado que:

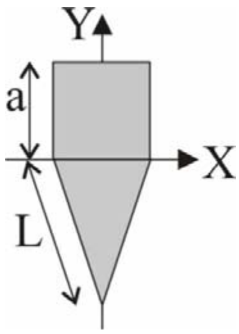
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i}$$

Así:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{4b^2\sigma.\left(\frac{b}{2}\vec{i} + 2b\vec{j}\right) + 2b^2\sigma.\left(2b\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j}\right)}{6b^2\sigma} = b\vec{i} + 1{,}5b\vec{j}$$

Las coordenadas del c.d.m. o del c.d.g son: P(b, 1,5b)

Este lugar corresponde a un punto del borde de la L en la parte vertical, por lo cual será muy difícil enganchar por dicho punto la letra, por lo tanto las soluciones a y b, no son correctas, puesto que implicaría clavar la chincheta, por fuera o por debajo de la posición del c.d.g. Si lo son la <u>c</u>, pues P no está dentro de la L, y la <u>d</u>.



3.1.18. De una plancha de cartón piedra recortas un cuadrado de lado a y un triángulo isósceles de lados iguales L, y cuya base se adapta al cuadrado. La relación que deberá existir entre L y a para que el centro de masas del sistema esté situado en el punto medio de la unión de ambas figuras, tal como indica el esquema deberá ser :

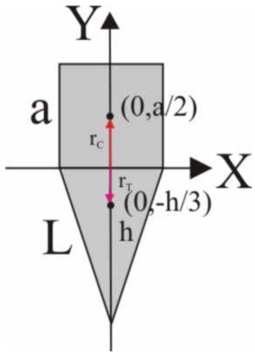
a) 1 b) 1,5 c)1,8

d)2 e)NINGUNO DE LOS VALORES DADOS

SOL:

Como son figuras geométricas planas y homogéneas, un cuadrado C y un triángulo T, determinaremos fundamentalmente el c.d.m. del sistema, que al eliminarse la densidad, cumple la condición::

$$\vec{r}_{CM} = \frac{S_C.\vec{r}_C + S_T.\vec{r}_T}{S_{total}} \text{ (I) (S= superficie)}$$



Tomamos el sistema de referencia, de forma que simplifique al máximo los cálculos de determinación del c.d.m. Para ello, su origen O, será el punto medio del lado que une el cuadrado con el triángulo isósceles, tal como muestra el dibujo. De esa forma , por las condiciones del enunciado, el c.d.m. de la figura será O (0,0)

Así para el cuadrado C : c.d.m (0, a/2). $S_C=a^2$.

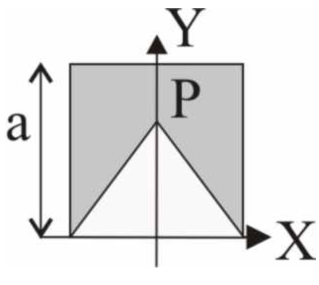
para el triángulo T: c.d.m (0,-h/3) $S_T=ah/2$

La altura h del triángulo, se determinará a partir del teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{L^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4L^2 - a^2}}{2}$$

Aplicando la ecuación (I). $0 = \dfrac{a^2.\dfrac{a}{2} + a.\dfrac{\sqrt{4L^2-a^2}}{4}.\left(-\dfrac{\sqrt{4L^2-a^2}}{6}\right)}{Superficie\ total}$

Simplificando, y separando variables: $a^2/2 = (4L^2-a^2)/24$, $L = a\sqrt{\frac{13}{4}} = 1{,}8a$ que coincide con la propuesta c.



3.1.19. Si a la plancha cuadrada anterior, le recortas un triángulo isósceles cuya base es un lado a y el vértice un punto P tal que sea el centro de masas de la nueva figura, la superficie de ésta será:

a) EL DOBLE DE LA PARTE EXTRAÍDA

b) MENOS DEL DOBLE DE LA PARTE EXTRAÍDA

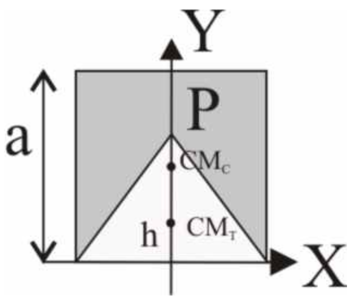
c) MÁS DEL DOBLE DE LA PARTE EXTRAÍDA

d) IGUAL A LA DE LA PARTE EXTRAÍDA

e) NINGUNO DE LOS VALORES DADOS

SOL:

Esta cuestión la plantearemos como la anterior, con la diferencia que al ser extraída la masa del triángulo isósceles, ésta se considerará negativa. Para simplificar el cálculo, situaremos el sistema de referencia de forma que por razones de simetría el c.d.m de la figura tenga como abscisa 0, tal como se observa en la figura, denominado h la altura del triángulo. De esta forma el punto P, será el (0,h).



Así para el cuadrado C: c.d.m. (0,a/2); $S_C=a^2$.

Para el triángulo T: c.d.m.(0,h/3); $S_T=ah/2$

Si aplicamos la fórmula $y_{CM} = \dfrac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}$ tendremos:

$h = [a^2.a/2 + (-ah/2).h/3]/(a^2-ah/2)$.

Simplificando y resolviendo: $2h^2-6ah+3a^2=0$.

Si invalidamos la solución en la que h>a, tendremos que h=0,634a.

Por lo tanto la superficie extraída (triángulo) será: a.0,634a/2=0,317a² , mientras que la de la nueva figura: a²-0,317a²=0,683a², que es más del doble de la extraída, lo que hace válida sólo la propuesta b.