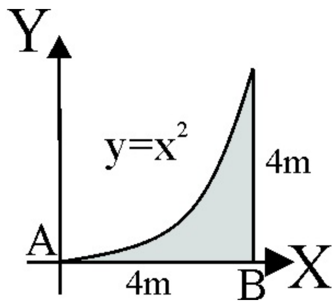
3.1. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASAS (continuación)



3.1.20. Una chapa uniforme de densidad superficial σ tiene la forma indicada en la figura.

La coordenada x de su centro de masas expresada en metros es:

a) 1 b) 2 c) 2,5 d) 3 e) 3,5

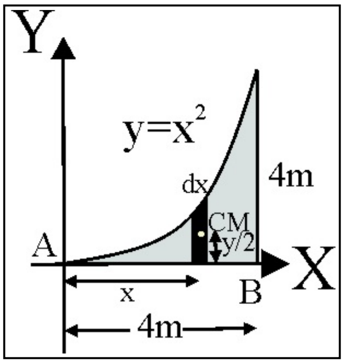
y la coordenada Y de su centro de masas expresada en metros es:

a) 2,8 b) 3,8 c) 4,8 d) 5,8 e) 6,8

SOL:

Sobre la chapa consideremos una superficie infinitesimal de altura y siendo su espesor dx, la cual está señalada en negro en la figura.

El centro de masas de esa figura tiene por coordenadas (x, y/2) y su masa es : σ y dx. Siendo σ la densidad superficial. Teniendo en cuenta que $y=x^2$



La coordenada x_{CM} es:

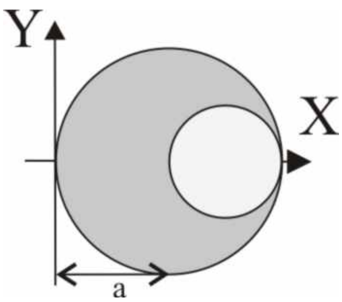
$$x_{CM}=\frac{\int_A^B x\,dm}{\int_A^B dm}=\frac{\int_0^4 x.\sigma y dx}{\int_0^4 \sigma y dx}=\frac{\int_0^4 x^3.\sigma dx}{\int_0^4 \sigma.x^2 dx}=\frac{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4}=3$$

Solución correcta, la d.

para la coordenada y_{CM}

$$y_{CM}=\frac{\int_A^B \frac{y}{2}dm}{\int_A^B dm}=\frac{\int_0^4 .\sigma y.\frac{y}{2}dx}{\int_0^4 \sigma y dx}=\frac{\int_0^4 \frac{x^4}{2}.\sigma dx}{\int_0^4 \sigma.x^2 dx}=\frac{\left[\frac{x^5}{10}\right]_0^4}{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4}=4{,}8$$

que corresponde a la respuesta c



3.1.21. Sobre una chapa circular de radio a y densidad superficial constante σ, se practica un agujero de radio a/2 de forma simétrica respecto al eje X, tal como indica la figura.

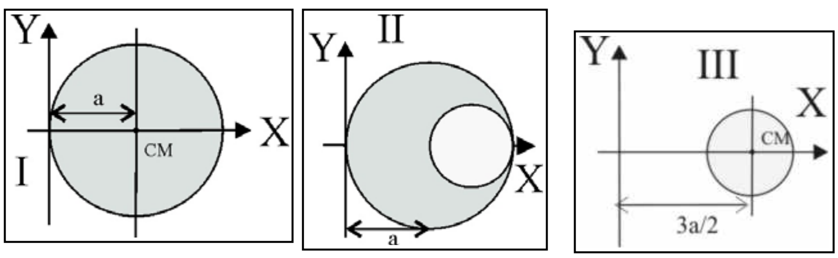
El centro de masas resulta que está situado sobre el eje X a una distancia del origen de:

a) a/6 b) 3a/6 c) 5a/6

d) a/2 e) NADA DE LO DICHO

SOL:

En la figura dada se observa que un disco uniforme puede considerarse como la suma de las dos figuras señaladas debajo, la II y la III, con sus posiciones de c.d.m en el sistema de referencia dado.



Así podremos escribir: $m_I a = m_{II} x_{CM} + m_{III}.3a/2$ (I).

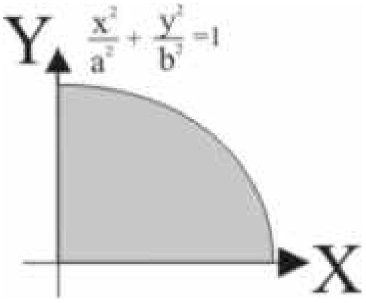
Puesto que masa =superficie.densidad superficial (σ) :

$m_I=\pi a^2.\sigma$, $m_{III}=(\pi a^2/4).\ \sigma$ s y $m_{II}=m_I-m_{III}= \pi a^2\sigma\ (1-1/4)=3\pi a^2\sigma/4$

Sustituyendo en (I), las masas, tenemos que:

$$\pi a^2.\sigma.a=(\pi a^2/4).\ \sigma.3a/2+3\pi a^2\sigma/4.x_{CM}\ .$$

Simplificando y despejando x_{CM} : $x_{CM}=5a/6$, que coincide con la propuesta c.

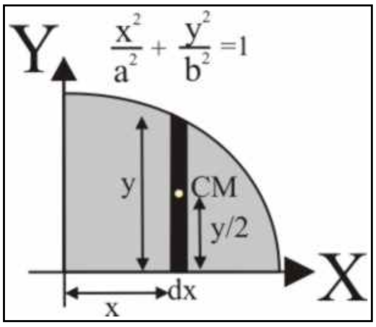


3.1.22. Una chapa de sección uniforme tiene la forma indicada en la figura, esto es, su superficie corresponde a un cuarto de la superficie de la elipse de semiejes a y b. El centro de masas de dicha figura tiene de coordenadas:

a) $4a/3\pi$, $4b/3\pi$ b) $3a/4\pi$, $4b/3\pi$ c) $3a/4\pi$, $3b/4\pi$
d) $3a/7\pi$, $3b/8\pi$ e) $4a/3\pi$, $8b/3\pi$

SOL:

Sobre la elipse tomamos un elemento de superficie de altura y, cuyo espesor es dx.



La masa de dicho elemento que aparece sombreado en la figura es dm=σ ydx, siendo σ la densidad superficial de la chapa. El área de la elipse es π ab y como la figura sólo es la cuarta parte del área es π ab/4 y su masa $\sigma\,\pi$ ab/4. La coordenada x_{CM} se obtiene:

$$x_{CM}=\frac{\int_A^B xdm}{\int_A^B dm}=\frac{\int_0^a x.\sigma ydx}{\frac{\sigma\pi ab}{4}}=\frac{\int_0^4 xy.dx}{\frac{\pi ab}{4}}$$

En la integral aparecen las variables x e y las cuales pueden relacionarse entre sí por medio de la ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ .Si diferenciamos dicha ecuación resulta: $\frac{2xdx}{a^2}+\frac{2ydy}{b^2}=0$

sustituyendo en la integral:

$$x_{CM}=\frac{\int_0^4 xy.dx}{\frac{\pi ab}{4}}=\frac{-\int_b^0 \frac{y^2a^2}{b^2}dy}{\frac{\pi ab}{4}}=-\frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{\pi ab}{4}}\left[\frac{y^3}{3}\right]_b^0=\frac{4a}{3\pi}$$

Para calcular la coordenada y_{CM} debemos resolver la integral

$$y_{CM}=\frac{\int_A^B ydm}{\int_A^B dm}=\frac{\int_0^a \frac{y}{2}.\sigma ydx}{\frac{\sigma\pi ab}{4}}=\frac{\int_0^a \frac{y^2}{2}.dx}{\frac{\pi ab}{4}}$$

obsérvese que en la primera integral la coordenada y del centro de masas del elemento de superficie rayado en la figura superior es y/2. Teniendo en cuenta que en la última integral aparece la diferencial de la variable x junto con la y es preciso relacionar una con otra, por lo que sustituimos el valor de y en función de x mediante la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad\qquad y^2=b^2(1-\frac{x^2}{a^2})$$

llevando el valor de y^2 a la última integral resulta:

$$y_{CM}=\frac{\int_0^a \frac{y^2}{2}.dx}{\frac{\pi ab}{4}}=\frac{\int_0^a \frac{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}{2}dx}{\frac{\pi ab}{4}}=\left(\frac{2b}{a\pi}\right)\left[\int_0^a dx-\int_0^a \frac{x^2}{a^2}dx\right]$$

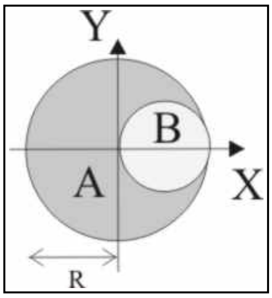
$$y_{CM}=\left(\frac{2b}{a\pi}\right)\left[(x)_o^a-\left(\frac{x^3}{3a^2}\right)_0^a\right]=\left(\frac{2b}{a\pi}\right)\left(a-\frac{a}{3}\right)=\frac{4b}{3\pi}$$

por tanto las coordenadas del centro de masas son: $4a/3\pi$, $4b/3\pi$. Es correcta la respuesta a.

3.1.23. Si quisieras apoyar una moneda circular, horadada de tal forma que el cilindro vaciado tiene por diámetro, el radio R de la moneda, tal como se aprecia en la figura, sobre un lápiz cortado, de forma que no se caiga, tendrás que hacerlo en un punto situado a la izquierda del centro de la moneda original y a una distancia:

a) -R/12 b) -R/6 c) -3R/6
d) -5R/6 e) NINGUNO DE LOS VALORES DADOS

SOL:



Este problema aun con enunciado diferente, es semejante al anterior, pues lo que se trata es determinar el c.d.m.del sistema, de forma que el punto de apoyo se efectúe en dicho punto, y el peso de la moneda agujereada, se equilibre con la reacción del apoyo. Sin embargo vamos a resolverlo tomando como sistema referencial, el centrado en el círculo grande, y considerando masa negativa la extraíble, al horadar la moneda. De esta forma, llamando A y B, respectivamente a la moneda grande y a la parte horadada, siendo h su grosor y ρ, la densidad volúmica de masa, puesto que masa =volumen. densidad, tendremos:

En A: c.d.m. (0,0) ; m= $\pi R^2 h \rho$. En B: c.d.m. (R/2,0) ; m= $\pi (R/2)^2 h \rho$

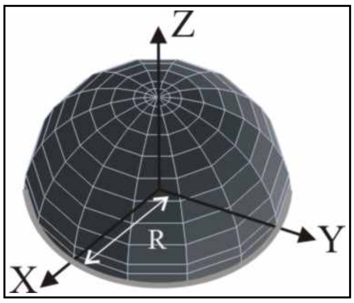
Siguiendo el procedimiento empleado en la prueba 3.1.21.

$$0 = \frac{\left[\pi R^2 h\rho - \pi \frac{R^2}{4} h\rho\right] x_{CM} + \pi \frac{R^2}{4} h\rho \cdot \frac{R}{2}}{Masa} \quad \Rightarrow x_{CM} - \frac{R}{6}$$

La solución correcta es la <u>b</u>

3.1.24. El centro de masas de una semiesfera de radio R, tal como la de la figura se encuentra en el eje Z a una altura sobre la base de:

a) 2R/8 b) 3R/8 c) 4R/8
d) 5R/8

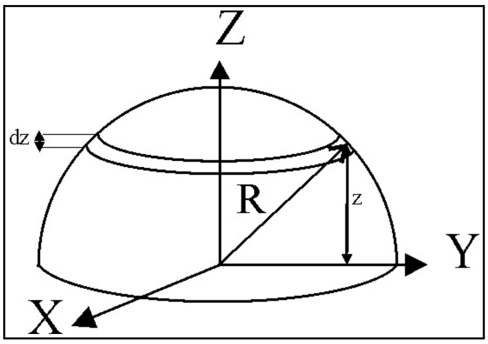


SOL:

Cortamos la semiesfera, tal como se indica en el dibujo por dos planos paralelos a la base de la misma y separados una distancia infinitesimal dz, según el sistema de referencia dado. El volumen comprendido entre los planos es :

$dV = \pi r^2 dz$,y la masa=volumen.densidad;

$dm= \pi r^2 dz. \ \rho$ (siendo ρ la densidad del material de la esfera).



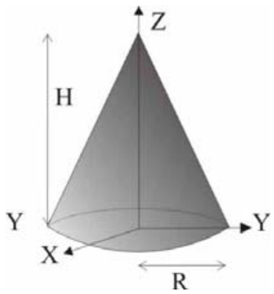
En el sistema de referencia dado x_{CM} e y_{CM} son 0, y sólo tendremos que determinar la componente z_{CM}.

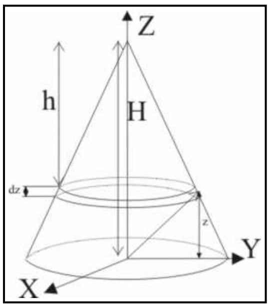
$$z_{CM} = \frac{\int_0^R z\,dm}{\int_0^R dm}$$ Dado que : $z^2+r^2 = R^2$ y la masa total, $M=4\pi R^3. \ \rho/6$.

Simplificando y resolviendo la integral,

$$z_{CM} = \frac{\int_0^R z\,dm}{\int_0^R dm} = \frac{\int_0^R z.\rho\pi r^2 dz}{\frac{4\pi R^3}{6}\rho} = \frac{\int_0^4 z.\left(R^2 - z^2\right)dz}{\frac{2R^3}{3}} = \frac{\left[\frac{R^2 z^2}{2}\right]_0^R - \left[\frac{z^4}{4}\right]_0^R}{\frac{2R^3}{3}} = \frac{3R}{8}$$

La respuesta correcta es la <u>b</u>.





3.1.25. El centro de masas de un cono de radio de la base R y altura H se encuentra en un punto de la misma, siendo la distancia a la base de:

a) 2H/3 b) H/3 c) H/4 d) H/5

SOL:

Sobre el cono tomemos un disco que dista h del vértice que posee un radio r y un espesor dz. De la figura se deduce que r es variable y también h.

La masa de ese elemento diferencial es π r^{2}dz ρ . Sea R el radio de la base del cono y H su altura, si se comparan los triángulos semejantes señalados en la figura se deduce: $\frac{R}{H}=\frac{r}{h}=\frac{r}{H-z}$ $\quad r^2=\left(\frac{H-z}{H}\right)^2 R^2$ (I)

La masa del cono es igual a su volumen por la densidad del material con que esté hecho: π R^{2}H ρ /3.

Para calcular la posición del centro de masas debemos resolver la integral siguiente:

$$z_{CM}=\frac{\int_0^H zdm}{\int_0^H dm}=\frac{\int_0^H z.\rho\pi r^2dz}{\frac{\pi R^2H}{3}\rho}=\frac{\int_0^H r^2z.dz}{\frac{R^2H}{3}}$$

En la última integral debemos poner la variable r en función de z mediante la expresión (I):

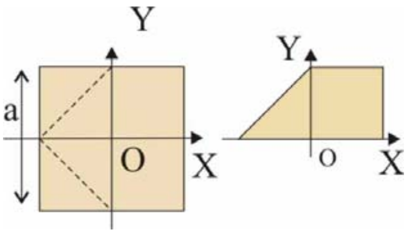
$$z_{CM}=\frac{\int_0^H r^2z.dz}{\frac{R^2H}{3}}=\frac{\int_0^H\left(\frac{H-z}{H}\right)^2R^2zdz}{\frac{R^2H}{3}}=\frac{\int_0^H zdz}{\frac{H}{3}}+\frac{\int_0^H\frac{z^3dz}{H^2}}{\frac{H}{3}}-\frac{\int_0^H\frac{2z^2dz}{H}}{\frac{H}{3}}$$

resolviendo las integrales y sustituyendo los límites resulta:

$$\frac{\int_0^H zdz}{\frac{H}{3}}+\frac{\int_0^H\frac{z^3dz}{H^2}}{\frac{H}{3}}-\frac{\int_0^H\frac{2z^2dz}{H}}{\frac{H}{3}}=\frac{3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^H}{H}+\frac{3\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H}{H^3}-\frac{6\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^H}{H^2}=\frac{H}{4}\quad \text{tal}$$

como se propone en c.

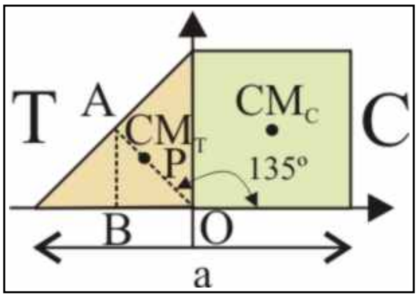
3.1.26. * Si eres obseso por las pajaritas de papel, recorta un cuadrado de lado a, dóblalo en cuatro partes, para marcar las dobleces. Desdóblalo. Toma dos esquinas contiguas, las doblas hacia el centro, y luego toda la figura por la mitad. Pues bien, el centro de masas de la nueva figura, una especie de "aerodinámica nave espacial" de papel esquematizada en el dibujo adjunto:



a) SE MANTENDRÍA EN EL CENTRO DEL CUADRADO
b) ESTARÁ EN EL PUNTO MEDIO DE LA UNION DE LA CABEZA(TRIÁNGULO) CON LA COLA (CUADRADO PEQUEÑO)
c) SE SITUARÍA EN EL PUNTO (0,042a ,0,21a)
d) TENDRÍA UN VECTOR DE POSICIÓN EN EL SISTEMA DE EJES DADOS $\vec{r} = \frac{a}{24}\vec{i} + \frac{5a}{24}\vec{j}$
e) NADA DE LO DICHO

SOL:

La génesis de la "nave espacial" de papel, se muestra en las sucesivas figuras. Nuestro sistema de referencia de la figura final, lo tomaremos como si partiéramos de un punto (0,0) coincidente con el centro original del cuadrado. Se nos forman un triángulo T , y un cuadrado C, cuya masa es la misma ,e igual a M/2, siendo M ,la masa total.



En C: c.d.m. (a/4 ,a/4) masa= M/2
En T: c.d.m. (x ,y) masa= M/2

Para calcular x,e y, considerando que se trata de un triángulo rectángulo isósceles, con ángulos de $45°$ y $90°$,y que el c.d.m. tiene un vector de posición cuyo módulo es OP, y ángulo -$135°$, siendo OP=2h/3 , x=OPcos$135°$, e y= OPsen$135°$. Si calculamos h, por aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo OAB : $h = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Por lo tanto, $OP = \frac{2a\sqrt{2}}{12} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

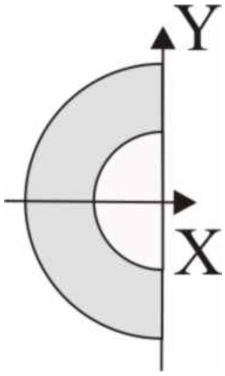
Así : $x = \frac{a\sqrt{2}}{6}\cos 135° = \frac{a\sqrt{2}}{6}.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{a}{6}$, e

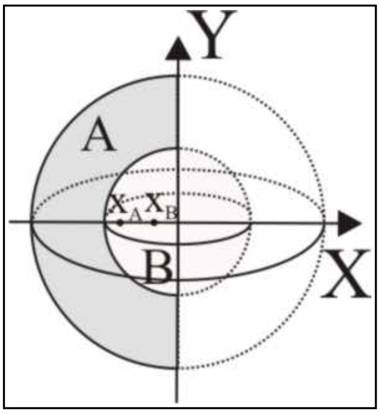
$$y = \frac{a\sqrt{2}}{6} sen135° = \frac{a\sqrt{2}}{6}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a}{6}.$$

Aplicando $\vec{r}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{r}_i}{\Sigma M_i}$

$$\vec{r}_{CM} = \left(\frac{\frac{M}{2}.\frac{a}{4} + \frac{M}{2}.\left(-\frac{a}{6}\right)}{M}.\right)\vec{i} + \left(\frac{\frac{M}{2}.\frac{a}{4} + \frac{M}{2}.\left(\frac{a}{6}\right)}{M}.\right)\vec{j} = \frac{a}{24}\vec{i} + \frac{5a}{24}\vec{j}$$

Son correctas las propuestas d y c.





3.1.27. Uno de los supuestos grandes plagios científicos, son los teoremas de Gouldine, matemático suizo, que generalizó los de Pappus, filósofo griego del siglo III dC, 13 siglos después. Las proposiciones de Pappus, son dos. La primera se aplica a superficies y dice que la superficie de un sólido de revolución es el producto de la longitud de su generatriz, por la distancia recorrida por el c.d.m.de dicha generatriz, al formar la figura de revolución. La segunda, aplicada a volúmenes afirma que: el volumen de cualquier sólido de revolución es el producto de su área generatriz, por la distancia recorrida por el c.d.m. de la misma, al formar el sólido. Aplicándolas podrás determinar fácilmente el centro de masas de una C mayúscula, formada por dos semicírculos concéntricos, de un tamaño tal que el radio del mayor R es doble del menor. El c.d.m. de la letra C de acuerdo con el sistema de referencia de la figura es:

a) -R/6π b) -R/3π c) -14R/9π
d) -7R/6π e) NADA DE LO DICHO

SOL:
La letra C, la podemos considerar formada por dos semicírculos A y B, de radios R y R/2, de tal manera que el pequeño se extraiga del mayor (masa negativa).
En el sistema de referencia elegido se anula la componente y del c.d.m..

Designamos con x_A la distancia del centro de masas del semicírculo A al origen de coordenadas y x_B la distancia del c.d.m del semicírculo B al origen de coordenadas.

Al girar A alrededor del eje Y engendra una esfera de radio R y la distancia recorrida por su c.d.m. es una circunferencia de radio x_A. Al girar B engendra una esfera de radio R/2 y su c.d.m. describe una circunferencia de radio x_B.

Aplicamos la segunda proposición de Pappus

En A: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2}\cdot(2\pi x_A) \Rightarrow x_A = \frac{4R}{3\pi}$

En B $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot(2\pi x_B) \Rightarrow x_B = \frac{2R}{3\pi}$

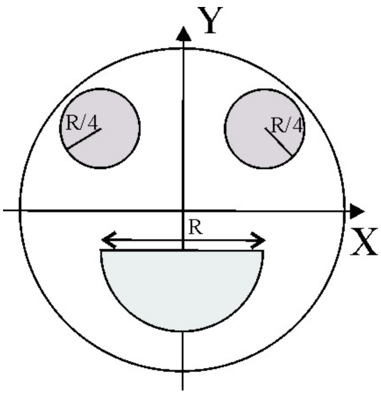
De acuerdo con el sistema de referencia elegido el centro de masas de A es: $-\frac{4R}{3\pi}$

y el de B: $-\frac{2R}{3\pi}$

Aplicando la fórmula para c.d.m., y considerando negativa la masa de B (superficie negativa).

$$x_{CM} = \frac{S_A x_A + (-S_B x_B)}{S_A + (-S_B)} = \frac{\pi\frac{R^2}{2}\cdot\left(-\frac{4R}{3\pi}\right) - \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}\cdot\left(-\frac{2R}{3\pi}\right)}{\pi\frac{R^2}{2} - \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}} = -\frac{14R}{9\pi}$$

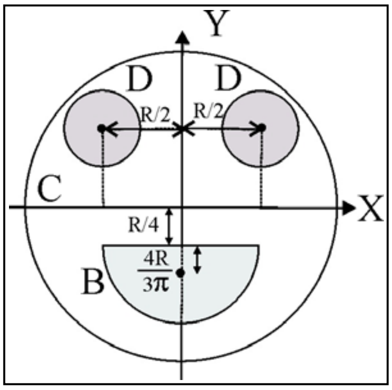
Por lo tanto la solución correcta es la respuesta <u>c</u>.



3.1.28.Al determinar el centro de masas, de la careta de la figura, una cara circular de radio R, con dos huecos simétricos y centrados a la mitad del radio, para los ojos formados por pequeños círculos de radio R/4 y un semicírculo como boca, de radio R/2, dirás que estará situado en el punto P:

a) 0 ; -0,12R b) 0 ; 0,11R c) 0 ; 0,8R/9π

d) 0 ; -0,8R/9π e) NADA DE LO DICHO



SOL:
El sistema de referencia lo centramos en el círculo de la careta C, que estará formada por este círculo [c.d.m (0,0)], al que recortaremos (masas o superficies negativas) los círculos de los ojos derecho D [c.d.m (-R/2 ,-R/2)], izquierdo [c.d.m (R/2,R/2)] , y el semicírculo de la boca: B [c.d.m.(0 ,-4R/3π -R/4)], según se ha visto en 3.1.27.(A), por aplicación de la segunda propuesta de Pappus, ya que la componente y del c.d.m.de un semicírculo, -4R/3π , hay que trasladarlo en función de la posición de la boca, -R/4,de forma que en la careta, será -R[(4/3π)+1/4].

Puesto que suponemos se trata de material homogéneo, y figuras geométricas sencillas, determinaremos el centroide de la careta, y por razones de simetría, únicamente la coordenada y_{CM}, ya que x_{CM}=0.

Las superficies respectivas son: C = πR^2 D(derecho) = $\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{16}$

D(izquierdo) = $\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{16}$; B= $\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{8}$

Como $y_{CM} = \frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}$:

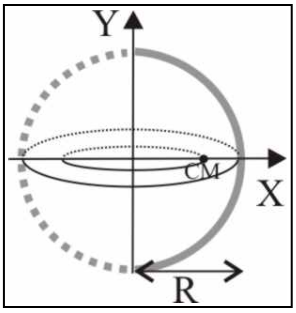
$$y_{CM} = \frac{\left(\pi R^2 \cdot 0\right) - \left[\frac{\pi R^2}{16}\cdot\left(-\frac{R}{2}\right)\right] - \left(\frac{\pi R^2}{16}\cdot\frac{R}{2}\right) - \left[\frac{\pi R^2}{8}\cdot R\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{4}\right)\right]}{\pi R^2 + \frac{\pi R^2}{16} + \frac{\pi R^2}{16} + \frac{\pi R^2}{8}}$$

$$y_{CM} = \frac{\frac{1}{8}R\left(\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{4}\right)\right)}{\frac{5}{4}} = \frac{0{,}125R\cdot 4{,}44}{5} = 0{,}11R$$

La solución correcta es b.

3.1.29. Pappus fue un matemático griego que ya en el siglo III después de Cristo, había determinado los centros de masa de figuras que pudieran engendrar otras de revolución. Así por ejemplo si cortas un alambre homogéneo de longitud L, formas con él una semi-circunferencia, lo tomas por los extremos y lo haces girar, tal como muestra el dibujo, engendrarías una figura geométrica cuya área sería igual a la longitud engendradora multiplicada por el recorrido del centro de masas de la semicircunferencia. Por eso, éste, deberá estar a una distancia del punto medio de los extremos de la semicircunferencia igual a:

a) L/π^2 b) $2L/\pi^2$ c) $L/2\pi^2$
d) $2L/\pi$ e) NINGUNO DE LOS VALORES DADOS



SOL:

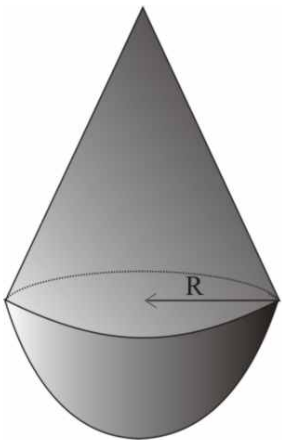
Para resolver la cuestión emplearemos la primera proposición de Pappus, desarrollada en la 3.1.27, puesto que como se indica en el enunciado, al girar el alambre en forma de semicircunferencia 360º, sobre un eje tangente a sus extremos engendrará una esfera hueca (considerando que el espesor del alambre es despreciable).

Tomando el sistema de referencia, de tal forma que se anule la componente y_{CM}, tendremos que :

Superficie engendrada ($4\pi R^2$)= Longitud engendradora ($2\pi R/2$). Recorrido del c.d.m. : ($2\pi\ x_{CM}$)

Despejando x_{CM} : $x_{CM}=2R/\pi$,que coincide con el determinado por integración en la cuestión 3.1.14 .

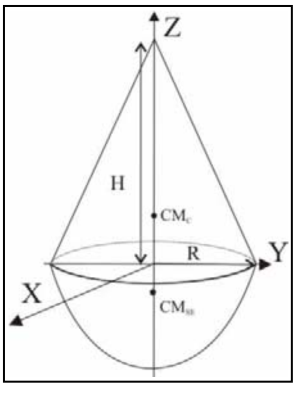
Al ser $L=2\pi R/2$, $R= L/\pi$, y $x_{CM}=2L/\pi^2$, como indica la propuesta <u>b</u> .



3.1.30. Antes, uno de los juguetes más apreciados de los niños pequeños, eran aquellos muñecos que por muchos porrazos que les dieran, siempre retornaban a su posición vertical. Para ello es necesario que el centro de gravedad esté lo suficientemente bajo para que el equilibrio sea estable y retorne a dicha posición, o en el caso límite, sea indiferente. Juega a diseñar un juguete así, con una semiesfera de madera de radio R, perfectamente pegada a un cilindro del mismo material. La máxima altura del cilindro para que retorne siempre a la posición vertical deberá ser menor que:

a) $R\sqrt{3}$ b) $\frac{3R\sqrt{3}}{8}$ c) 2R/5

d) $2R\sqrt{3}$ e) NINGUNO DE LOS VALORES DADOS



SOL:

Para que se mantenga el juguete indiferente a cualquier golpe que pretenda sacarlo de su situación (equilibrio indiferente), la posición más alta del c.d.m.del sistema será el centro de la base de la semiesfera, en la unión con el cono. Si tomamos un sistema de referencia [c.d.m.de la figura (0,0,0)], como se indica en la figura, y considerando los c.d.m.del cono, z_C, realizado en el problema 3.1.25 $z_C= H/4$, y de la semiesfera, $z_E=3R/8$, hecho en el 3.1.24, y aplicándolos al sistema de referencia tomado, tendremos que en:

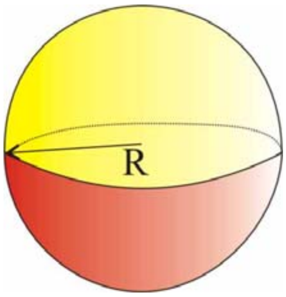
EL CILINDRO: c.d.m.(0, 0, H/4) ; masa=volumen.densidad=($\pi R^2H/3$). ρ

LA SEMIESFERA:c.d.m.(0, 0, -3R/8) ; masa=volumen.densidad=($4\pi R^3/6$). ρ

Como $$z_{CM}=\frac{\Sigma M_i z_i}{\Sigma M_i}$$

$$0=\frac{\frac{\pi R^2 H}{3}\rho\cdot\frac{H}{4}+\frac{4\pi R^3}{6}\rho\cdot\left(-\frac{3R}{8}\right)}{\sum M_i} \Rightarrow H=R\sqrt{3}$$

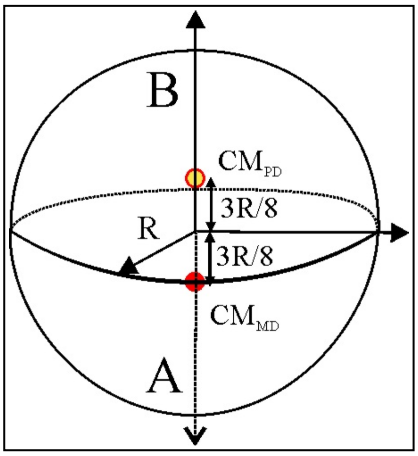
La solución correcta es la <u>a</u>**.**



3.1.31.* Supón una esfera de radio R, formada por dos hemisferios de diferente material, siendo la densidad de uno de ellos 5 veces la del otro. De este juguete así realizado podrás decir que:

a) NUNCA PODRÍA MANTENERSE EN EQUILIBRIO SITUANDO LOS HEMISFERIOS A DERECHA E IZQUIERDA DE LA VERTICAL DE LA MESA QUE LO SOPORTA
b) ESTARÍA EN EQUILIBRIO INESTABLE SI EL MATERIAL MENOS DENSO ESTÁ EN LA PARTE INFERIOR
c) EL CENTRO DE MASAS DE LA FIGURA SE ENCUENTRA A UNA DISTANCIA DEL APOYO DE LA MESA DE 3R/4
d) LA MASA DE DICHA ESFERA ES 6 VECES LA DEL HEMISFERIO MENOS DENSO

SOL:



El equilibrio sólo será estable si el hemisferio A ,de densidad, 5**D**, esté situado en la parte inferior, mientras el de menor B, se sitúe encima pues el centro de gravedad de todo el cuerpo estará situado lo más bajo posible. En cualquier otro caso, los pares recuperadores formados por los pesos de cada parte y la reacción del suelo, harían que el cuerpo adoptara la posición indicada. Por este motivo las propuestas a y b son correctas.

Para determinar el c.d.m.del conjunto, tal como indica la figura, fijamos el sistema de referencia de forma que sus coordenada x_{CM},e y_{CM} se anulen, y se simplifique al máximo el desarrollo del problema(eje horizontal sobre la unión de los hemisferios).

Si consideramos el cálculo de c.d.m. para semiesferas realizado en 3.1.24.: c.d.m=(0, 0, 3R/8)

Al tomar estos valores sobre el sistema de referencia adoptado, tenemos:

En A: c.d.m.(0,0,-3R/8) Masa=Volumen.densidad=$(4\pi R^3/6).5\rho$

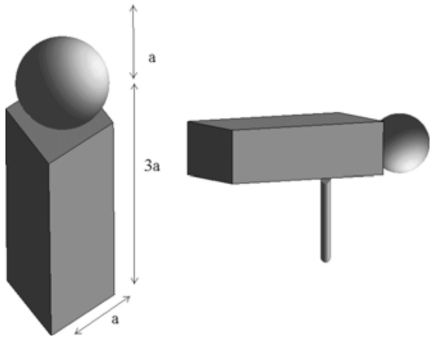
En B: c.d.m.(0,0,3R/8) Masa=Volumen.densidad=$(4\pi R^3/6).\ \rho$

Como $z_{CM} = \dfrac{\Sigma M_i z_i}{\Sigma M_i} =$

$$z_{CM} = \frac{\frac{4\pi R^3}{6}5\rho\cdot\left(-\frac{3R}{8}\right)+\frac{4\pi R^3}{6}\rho\cdot\frac{3R}{8}}{\frac{4\pi R^3}{6}5\rho+\frac{4\pi R^3}{6}\rho} = \frac{-\frac{15R}{8}+\frac{3R}{8}}{6} = -\frac{R}{4}$$

Referido al apoyo en la mesa, la distancia del c.d.m. del sistema al punto de apoyo será R-R/4=3R/4 ,como se propone en c.

La masa total=M_A+M_B= $(4\pi R^3/6).5\rho+(4\pi R^3/6).\ \rho = 4\pi R^3.\ \rho$, será seis veces la masa M_B, como indica la solución d. Por lo tanto todas las propuestas son correctas.



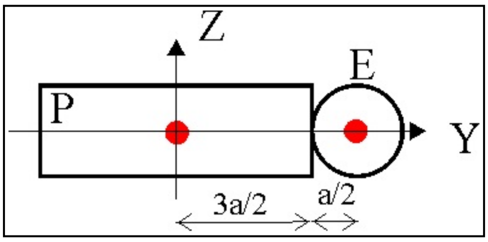
3.1.32. Quieres situar el adorno de la figura, formado por un paralelepípedo de aristas 3a, a y a y una esfera de radio a/2, unidos y de un mismo material, en equilibrio y sobre una barra muy fina. El punto donde deberás apoyarlo a una distancia a la derecha del punto medio de la base del paralelepípedo:

a) 0,30a b) 0,23a c) 0,20a
d) 0,21a e) NADA DE LO DICHO

SOL:

Para simplificar el problema, y dado que el material es homogéneo, lo consideraremos en el plano, tomando el sistema de referencia centrado en el paralelepípedo de forma que, tal como se observa en la figura, por razones de simetría x_{CM} y z_{CM}, sean nulas, determinando únicamente la coordenada y_{CM}.

Así, los c.d.m y las masas del paralelepípedo P y de la esfera E, serán:



En P: c.d.m.(0, 0, 0,) Masa=V.densidad=3a.a.a.ρ (ρ =densidad volúmica)

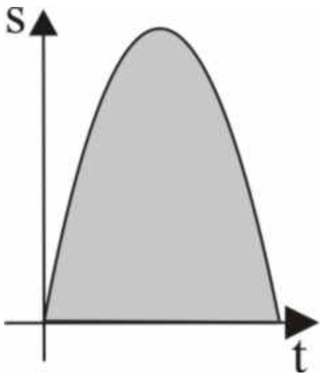
En E: c.d.m.[0, (3a/2+a/2) ,0] Masa=V.densidad=[4 π $(a/2)^3$/3]. ρ

$$y_{CM} = \frac{\Sigma M_i y_i}{\Sigma M_i} = \frac{3a^3\rho\cdot 0 + \dfrac{4\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^3}{3}\rho\cdot\left(\dfrac{3}{2}a+\dfrac{a}{2}\right)}{3a^3\rho + \dfrac{4\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^3}{3}\rho} = 0{,}23\,a\,,$$

Como se propone en <u>b</u>.

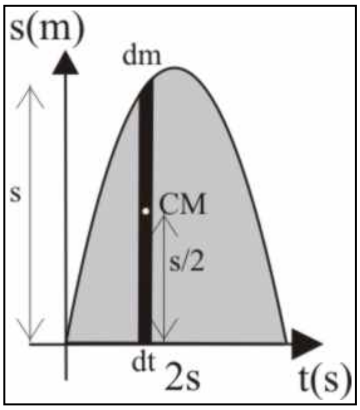
3.1.33. La gráfica posición/tiempo de un punto material que asciende desde el origen con velocidad inicial de 10m/s en el campo gravitatorio terrestre ($g=10m/s^2$), la realizas en cartulina homogénea de densidad superficial σ, la recortas tomando como base el eje de los tiempos durante el vuelo. La posición del centro de gravedad de la figura formada será en la gráfica s/t (posición en ordenadas y tiempo en abscisas), aproximadamente:

a) (1,3) b) (1,1) c) (1,4)
d) (1,2) e) NADA DE LO DICHO



SOL:
Primero se determina las condiciones de la gráfica que se realiza.
Como $s=v_0t-gt^2/2$, se trata de una parábola de ecuación: $s=10t-5t^2$.
En el punto más alto de su trayectoria v=0, $0=v_0-gt$, 0=10-10t , t=1s. y s=10.1-5.1=5m. Por lo tanto el vértice de la parábola estará en el punto (1,5).
Se tratará por lo tanto de dibujar una parábola con ecuación $s=10t-5t^2$ (I), con vértice en (1,5), y durante el intervalo 0 - 2s, que será el tiempo de vuelo del punto material.
Dado que la superficie es simétrica, la coordenada t, del centro de masa,, será 1s por lo que sólo habrá que calcular la posición s del centro de masas.

Para determinar dm, tomaremos una pequeña porción superficial dS, de base dt, y altura s, de forma que dm= σ dS= σ s dt= σ $(10t-5t^2)dt$ (III) .



El c.d.m. de dm, tendrá por coordenadas (t, s/2), pues lo consideramos prácticamente un rectángulo de base infinitesimal. Por lo tanto la aplicación de

$$s_{CM}=\frac{\int_0^2 sdm}{\int_0^2 dm}$$

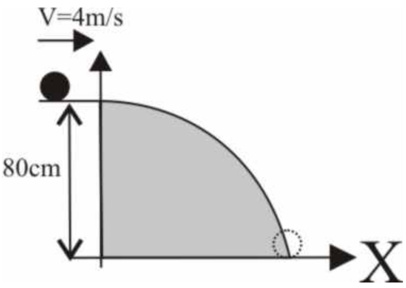
(II), a este rectángulo, que integraremos a toda la masa en el intervalo de t, entre 0 y 2 segundos:

Sustituyendo (I) y (III) en (II):

$$s_{CM}=\frac{\int_0^2 sdm}{\int_0^2 dm}=\frac{\int_0^2 \frac{10t-5t^2}{2}.\sigma\left(10-5t^2\right)dt}{\int_0^2 \sigma\left(10-5t^2\right)dt}=\frac{266{,}66+160-400}{2\left(20-\frac{40}{3}\right)}=\frac{26{,}66}{2.6{,}66}=2$$

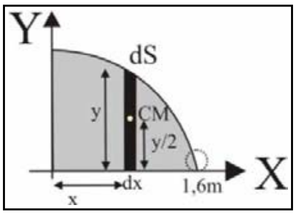
Por lo tanto el c.d.m.de la figura estará en el punto P(1,2) de la gráfica s/t durante el tiempo de vuelo. La solución correcta es la <u>d</u>.

3.1.34. Una bola rueda por una mesa horizontal de altura sobre el piso 80 cm, sin apenas rozamiento con una velocidad de 4m/s, cayendo al suelo. Estudias su movimiento, realizas la gráfica de la trayectoria de su caída tomando como referencia un sistema de ejes situado en el suelo y en el borde de la mesa, pegas la superficie abarcada entre los ejes X, e Y en una cartulina homogénea, y la recortas. El centro de masa de la figura obtenida, estará situado en dichas coordenadas, en el punto:



a) (1,20 , 0,60) b) (0,60 , 0,32) c) (0,45 , 0,45)
d) (0,68 , 0,42) e) NADA DE LO DICHO
$g = 10m/s^2$

SOL:



Se estudiará el movimiento para determinar la ecuación de la trayectoria, tal como muestra la figura.
Sobre el eje X, se trata de un M.U. y su posición será $x=v_xt = 4t$ (I)
Sobre el eje Y , se trata de un M.U.A. y su posición será:
$y =y_0-gt^2/2 = 0,8-5t^2$ (II).
La trayectoria la obtendremos, despejando t en (I), y llevándola a (II):
$y=0,8-5x^2/16$ (III).
Se trata de una parábola, que corta a los ejes en los puntos (0, 0,8) [salida de la bola de la mesa) y (1,6 ,0) , llegada al suelo. Este punto se determina calculando x, en (III), con la condición y=0.
Al recortar y pegar la trayectoria sobre la cartulina se obtendrá una plancha en forma de porción de parábola, y su c.d.m. se podrá calcular como en 3.1.20 y 3.1.33.
Dado que se trata de una figura geométrica con densidad constante, esta vez lo determinaremos como centroide [eliminamos densidades].Así tomaremos un elemento de superficie infinitesimal dS, como indica la figura, cuyo centro de masas, tendrá por coordenadas (x, y/2), siendo
$dS=ydx =(0,8-5x^2/16)dx$ (IV).Integraremos este elemento dS entre 0 y 1,6 , posición de salida y llegada de la bola sobre el eje X. De esa forma S=0,85

$$x_{CM} = \frac{\int_0^{1,6} xdS}{\int_0^{1,6} dS} \quad (V) \qquad y_{CM} = \frac{\int_0^{1,6} \frac{y}{2} dS}{\int_0^{1,6} dS} \quad (VI),$$

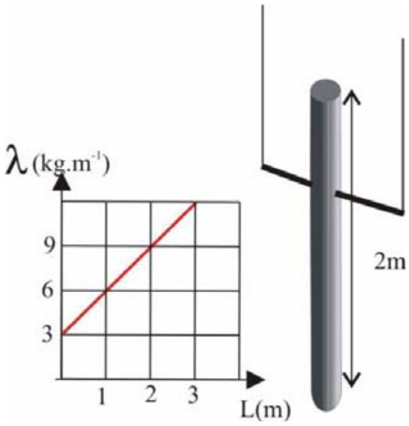
los límites dependerán de la variable que se tome, en este caso la x.
Sustituimos dS de (IV) e y de (III) en (V) y (VI), obtenemos:

$$x_{CM} = \frac{\int_0^{1,6} x.\left(0,8-\frac{5x^2}{16}\right)dx}{\int_0^{1,6}\left(0,8-\frac{5x^2}{16}\right)dx} = \frac{1,024-0,51}{0,85} = 0,60$$

$$y_{CM} = \frac{\int_0^{1,6} \frac{y}{2}.\left(0,8-\frac{5x^2}{16}\right)dx}{\int_0^{1,6}\left(0,8-\frac{5x^2}{16}\right)dx} = \frac{1,024+0,205-0,683}{2.0,853} = 0,32$$

La solución correcta es la b

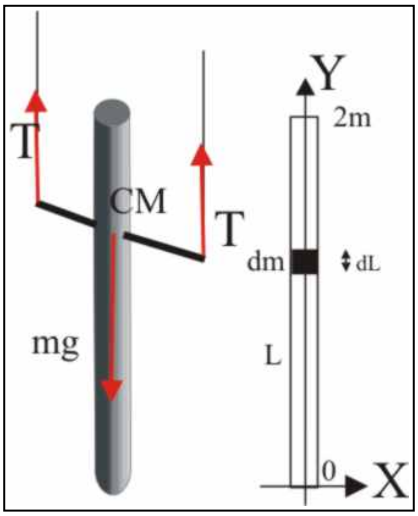
.



3.1.35.* Pretendes colgar una barra metálica heterogénea de un pequeño trapecio, de masa despreciable sujeto a dos cuerdas, para que oscile libremente, haciéndole un orificio por su centro de masas. Si su longitud es de 2m y su densidad lineal λ varía con aquella según la gráfica dada, podrás asegurar que:

a) LA DENSIDAD LINEAL VARÍA CON LA LONGITUD DE LA BARRA SEGÚN UNA LEY DADA POR LA RELACION λ=3+L
b) EL ORIFICIO DEBERÁ REALIZARSE A UNA DISTANCIA 7/6 m DEL EXTREMO MENOS DENSO
c) LA TENSIÓN DE LA CUERDA DEL TRAPECIO QUE DEBE SOPORTAR LA BARRA DEBERÁ SER DE 60N
d) SI SE COLOCARA EN UN ASCENSOR QUE FRENA AL ASCENDER CON UNA ACELERACIÓN DE 2m/s^2, LA TENSIÓN DE CADA CUERDA SERÍA DE 43N

SOL:



La interpretación de la gráfica de la variación de la densidad lineal con la longitud, nos lleva a determinar la ecuación de la recta λ = f(L).Su pendiente es (9-3)/2 = 3, y para L=0, λ=3. Por lo tanto su ecuación será λ = 3 + 3L , (I) que no coincide con la propuesta a.

La masa de la varilla se calculará tomando un elemento dm= λ dL=(3+3L)dL,, cuyo centro de masas estará a L,del origen e integrándolo a toda la longitud de la varilla, entre 0 y 2m.

$$M = \int_0^2 dm = \int_0^2 (3+3L)dL = 3L\Big|_0^2 + \frac{3}{2}L^2\Big|_0^2 = 6+6=12\,kg$$

Para que oscile libremente, el equilibrio debe ser indiferente, lo que precisa que la reacción del soporte se efectúe en el c.d.m. de la varilla, de forma que se anulen las fuerzas, siendo la reacción la resultante de las dos fuerzas paralelas, tensiones ,de las cuerdas del trapecio. En ese punto, que coincidirá con el punto medio del trapecio : peso de la varilla + peso del trapecio (será 0,pues su masa es despreciable) = Reacción del trapecio =2 (tensión de la cuerda).

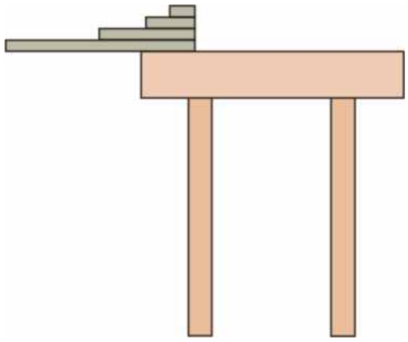
O sea : 2**T**-12.10**j** N. T=60**j**N , como indica c.

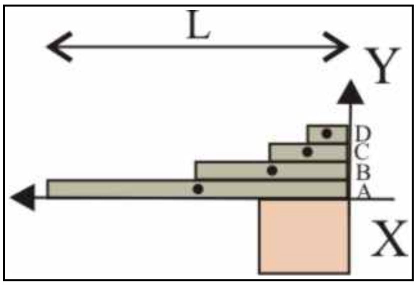
El cálculo del c.d.m.,se determinará como en la cuestión 3.1.12.: $y_{CM} = \dfrac{\int_0^2 ydm}{\int_0^2 dm}$ (II). De la ecuación (II), sustituyendo:

$$y_{CM} = \frac{\int_0^2 L(3+3L)dL}{12} = \frac{7}{6} = 1{,}17m$$,o sea a 1,17m.del extremo menos denso ,como se propone en b.

Si se dispusiera en un ascensor que frena (aceleración con sentido contrario a la velocidad) al ascender(velocidad>0) [sistema no inercial con a=-2m/s²],la fuerza inercial que actuaría en el sistema del ascensor, sobre la varilla sería :

$\mathbf{F}_i$=-m**a**=-12.(-2)=24**j**N. En este caso el equilibrio de fuerzas implica que: 2**T**+24**j**-120**j**=0, **T**=48**j**N , que no corresponde a la propuesta d.





3.1.36. El equilibrio de un cuerpo apoyado o suspendido puede ser estable, inestable e indiferente. Para que sea estable se requiere en el primer caso (cuerpo apoyado), que el centro de gravedad esté en la vertical de la base de apoyo, y en el segundo que esté por debajo del punto de suspensión. Por eso para mantener un cuerpo en equilibrio estable es imprescindible conocer la posición del centro de masas que deberá coincidir en este caso con el de gravedad. Así, si tienes dos chapas cuadradas iguales de cartón piedra, de lado L. Apoyas una sobre una mesa separándola al máximo de su borde,sin que se caiga. Cortas la otra por la mitad,y la superpones a la primera, repitiendo lo mismo con la otra mitad, y así sucesivamente, de forma que ajustes el borde interior de cuatro piezas por el lado de igual tamaño, como se observa en el dibujo.En este caso, lo máximo que podrá sobresalir de la mesa, la chapa o placa base, sin caerse deberá ser:

a) 0,55L b) 0,60L c) 0,65L d) 0,70L

Si el fragmento que queda sin situar, se alineara con el borde externo de la chapa base, ésta tendría que desplazarse hacia el interior de la mesa para restablecer el equilibrio, una distancia:

a) 0,05L b) 0,01L c) 0,03L d) 0,04L

(Se supondrá que las placas no se deslizan unas sobre otras)

SOL:

Como se observa en el dibujo, al ajustar el borde interior de las cuatro chapas, para que no se caigan de la mesa, hará falta que el c.d.m. del sistema esté dentro de la mesa, y el límite, será su borde. Llamando A,B,C y D, a las cuatro chapas de grosor despreciable, sus masas respectivas debido a su proceso de formación, serán M, M/2,M/4 y M/8.

Si tomamos como referencia, un sistema de ejes X/Y, centrados en el punto medio del borde común y en contacto con la mesa, tendremos que :

En A: cuadrado de lado L	c.d.m.(-L/2,0)	masa=M
En B: rectángulo de lados L/2,L	c.d.m.(-L/4,0)	masa=M/2
En C: rectángulo de lados L/4,L	c.d.m.(-L/8,0)	masa=M/4
En D: rectángulo de lados L/8,L	c.d.m.(-L/16,0)	masa=M/8

La coordenada x_{CM} del sistema será:

$$x_{CM} = \frac{M\left(-\frac{L}{2}\right)+\frac{M}{2}\left(-\frac{L}{4}\right)+\frac{M}{4}\left(-\frac{L}{8}\right)+\frac{M}{8}\left(-\frac{L}{16}\right)}{M+\frac{M}{2}+\frac{M}{4}+\frac{M}{8}} = -0{,}35\,L$$

Como debe estar sobre el borde de la mesa, lo máximo que podrá sobresalir de la mesa será:

L-0,35L=0,65L.La propuesta correcta será la c.

La segunda parte de la cuestión implica que al alinear con el borde exterior de la chapa base, un fragmento rectangular de lado L y L/8, de masa M/8, su c.d.m. sería (-15L/16,0).

La masa total del sistema será 2M,y el nuevo c.d.m. tendrá por abscisa:

$$x_{CM} = \frac{M\left(-\frac{L}{2}\right)+\frac{M}{2}\left(-\frac{L}{4}\right)+\frac{M}{4}\left(-\frac{L}{8}\right)+\frac{M}{8}\left(-\frac{L}{16}\right)+\frac{M}{8}\left(-\frac{15\,L}{16}\right)}{2\,M}$$

$$x_{CM} = -0{,}39\,L$$

Para que el nuevo c.d.m. del sistema esté en el borde de la mesa, se deberá desplazar la placa base una distancia

d= -0,35L**i**-(-0,39L**i**)=0,04L**i**.

Por lo tanto la placa base se tendrá que desplazar hacia la derecha 0,04L, por lo que la solución correcta es la d.