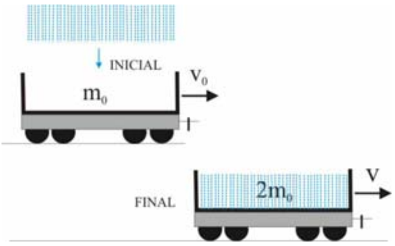
3.3. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (masa variable)



3.3.31.* Un contenedor impermeable, abierto por la parte superior con una capacidad tal que su masa lleno de agua es el doble que cuando está vacío, m_0 y se dispone sobre una plataforma móvil que rueda sin rozamiento por una vía rectilínea a una velocidad $\vec{v}_0$ m/s. Comienza a llover de forma que el ritmo con que se llena el contenedor es de n kg/s. En esta situación podrás afirmar que:

a) EL CONTENEDOR MANTIENE SIEMPRE LA MISMA VELOCIDAD

b) EL CONTENEDOR ADQUIERE UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE RETARDADO

c) EL CONTENEDOR TERMINARÁ DETENIÉNDOSE

d) LA MÍNIMA VELOCIDAD ALCANZADA POR EL CONTENEDOR ES $\dfrac{\vec{v}_0}{2}\, ms^{-1}$

e) EL RECORRIDO EFECTUADO POR EL CONTENEDOR HASTA LLENARSE ES DE $0{,}69\dfrac{m_0}{n}\vec{v}_0$

SOL:

Si suponemos que la lluvia cae verticalmente, y por lo tanto no actúa en el sentido del movimiento del contenedor, deberá conservarse la cantidad del movimiento mientras se llena aquél.

Así $m_0\vec{v}_0 = m\vec{v}$ (I).

Si la ley de la variación de la masa es dm/dt =n, integrando, $m = m_0 + nt$, siendo t la variable tiempo. Cuando el contenedor se llena $m=2m_0$, $2m_0=m_0+ nt_{llenado}$, $t_{llenado}=m_0/n$.

Sustituyendo m en (I) , $\vec{v} = \dfrac{m_0}{2m_0}\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{v}_0}{2}\, ms^{-1}$.

En la ecuación (I) sustituimos m por su valor en función del tiempo

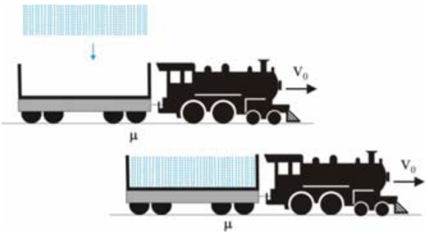
$$m_O\vec{v}_O = (m_O + nt)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_O\vec{v}_O}{m_O + nt} \Rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = -\frac{m_O\vec{v}_O n}{(m_O + nt)^2}$$

El recorrido se puede determinar de (I).

Así : $m_0\vec{v}_0 = m\dfrac{d\vec{x}}{dt}$

$$\vec{x} = \int_0^{\frac{m_0}{n}} \frac{m_0\vec{v}_0}{m_0 + nt}\, dt = \frac{m_0}{n}\vec{v}_0\left(\ln\left(m_0 + \frac{m_0.n}{n}\right) - \ln m_0\right) = \frac{m_0\vec{v}_0}{n}\ln 2 = 0{,}69\frac{m_0}{n}\vec{v}_0$$

Por lo tanto sólo son correctas las propuestas b ,d y e.



3.3.32. Si el contenedor anterior fuera arrastrado por una locomotora, por los raíles con los que el coeficiente de rozamiento es μ, para que mantuviera durante el tiempo de llenado por la lluvia una velocidad constante $\vec{v}_0$, la locomotora tendría que aplicar una fuerza horizontal sobre el contenedor y la potencia desarrollada por esa fuerza cuando la de rozamiento es máxima, vale, expresada en vatios:

a) $v_0(\frac{n}{2}v_0 + 2\mu m_0 g)$ b) $v_0(nv_0 - 2\mu m_0 g)$

c) $v_0(\mu m_0 g - nv_0)$ d) $v_0^2(n\ \mu m_0 g)$

SOL:

En la cuestión anterior se calcula que debido a la lluvia se produce una aceleración negativa

$$a = -\frac{m_o n v_o}{\left(m_o + nt\right)^2}$$

La fuerza aplicada al contenedor debe producir por una parte una aceleración positiva igual en valor numérico de la anterior para que sumadas las dos aceleraciones den valor nulo y por otra parte debe vencer a la fuerza de rozamiento que aumenta a medida que aumenta el peso del contenedor. Luego la fuerza que aplica la locomotora es:

$$F = ma + Fr = \left(m_o + nt\right)\cdot\frac{m_o n v_o}{\left(m_o + nt\right)^2} + \mu\left(m_o + nt\right)g = \frac{m_o n v_o}{m_o + nt} + \mu\left(m_o + nt\right)g$$

La fuerza de rozamiento es máxima cuando el contenedor está lleno de agua y su masa es 2 m_o. En la cuestión anterior hemos visto que el tiempo de llenado es $t_{llenado} = m_o/n$

La fuerza vale

$$F == \frac{m_o n v_o}{m_o + n\frac{m_o}{n}} + \mu\left(m_o + n\frac{m_o}{n}\right)g = \frac{n v_o}{2} + 2m_o \mu g$$

La potencia: $P = F\cdot v_o = \frac{n v_o^2}{2} + 2m_o \mu g v_o$

que corresponde a la propuesta a.

3.3.33. Los camiones de riego que en las madrugadas suelen limpiar nuestras calles, son un claro ejemplo de un sistema que debe procurar mantener una velocidad constante pese a la pérdida continua de masa. Si un camión cisterna, tiene una masa m, cuando está completamente cargado, y va lanzando un chorro de agua con velocidad $\vec{u}$ respecto del camión**,** en sentido contrario al de su marcha, siendo el régimen de gasto de agua n kg/s. La potencia disipada en vatios para lograr que el camión mantenga su velocidad constante es:

a) unv　　b) u^2n/v　　c) - nv^2/u

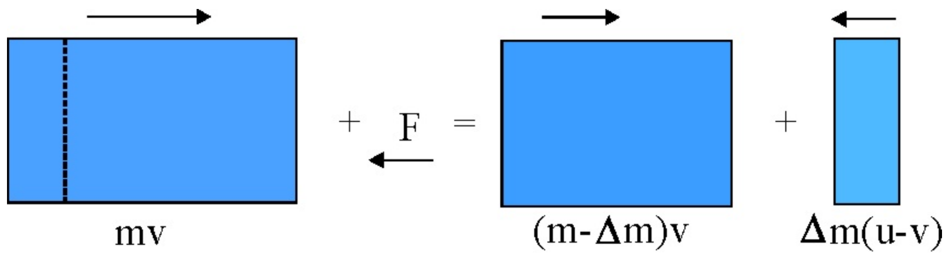
d) - uvn　　e) NADA DE LO DICHO

SOL

El camión aumentaría su velocidad debido a la pérdida de agua, por lo tanto, *deberá aplicarse una fuerza en sentido contrario a su marcha que contrarreste este proceso* y de esta manera la velocidad se mantenga constante.

En un determinado instante la masa del camión y del agua es m y su velocidad v, un tiempo posterior Δt la masa del camión es m-Δm y su velocidad es v , en ese intervalo de tiempo ha actuado la fuerza F en sentido contrario a la marcha

Aplicamos el principio del impulso y del momento lineal



$$mv - F\Delta t = (m - \Delta m)v - \Delta m(u - v) \Rightarrow$$

$$mv - F\Delta t = mv - \Delta mv - \Delta mu + \Delta mv \Rightarrow F\Delta t = \Delta m\, u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m}{\Delta t} u = -nu$$

La potencia disipada es : $P = Fv = -nuv$

3.3.34. Los núcleos atómicos inestables (fuera de la franja de estabilidad), se desintegran espontáneamente emitiendo partículas que salen a gran velocidad, lo cual deberá provocar una gran variación de la cantidad de movimiento del núcleo inicial. Si uno de masa m, lanza una partícula de masa cinco veces menor, con una velocidad $\vec{v}$, el residual se desplazará con velocidad:

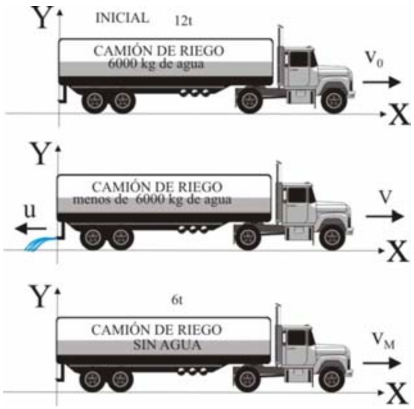
a) $5\vec{v}$　　b) -5$\vec{v}$　　c) $-\frac{\vec{v}}{4}$　　d) $\frac{\vec{v}}{4}$

SOL

La masa del sistema antes de la desintegración será m, por lo que si la partícula que se emite tiene de masa m/5, el núcleo residual, si no tenemos en cuenta consideraciones energéticas, que supondrían variación de la masa (teoría relativista), tendría una masa m-m/5 =4m/5. Por eso, si $\vec{v}_{CM} = 0$, como $\vec{v}_{CM} = \frac{\Sigma M_i \vec{v}_i}{\Sigma M_i}$, $\frac{4m}{5} m.\vec{v}_X + \frac{m}{5}.\vec{v} = 0$;

$\vec{v}_X = -\vec{v}/4\ ms^{-1}$. La propuesta d es la correcta.

3.3.35.* Imaginemos que un camión aljibe, con un peso bruto de 12 t, y una tara de 6000 kg, sólo se moviera, por efecto de la salida del agua de riego, con un ritmo continuo de 20 litros por minuto, y una velocidad $\vec{u}$ de 1m/s respecto del camión. Si inicialmente antes de comenzar a regar su velocidad era de 10 km/h, dirás que:



a) SÓLO PODRÁ REGAR DURANTE 5 HORAS

b) SU VELOCIDAD MÁXIMA FUE DE 12,5 km/h.

c) SU ACELERACIÓN MEDIA FUE DE 0,2 m/s².

d) AL CABO DE 2 HORAS SU VELOCIDAD SERÍA DE 10,8 km/h.

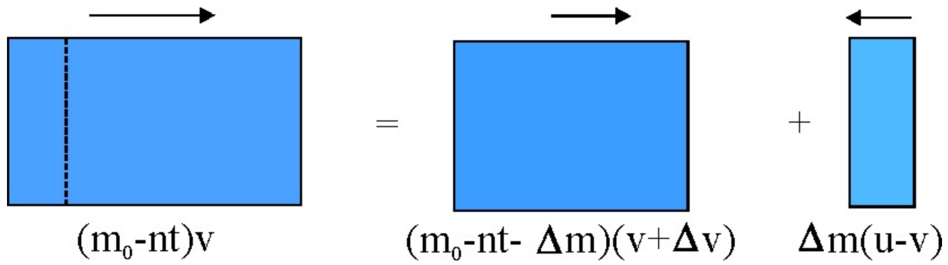
SOL:

Si el peso bruto son 12 t y la tara, o peso del camión vacío es de 6000 kg, la cantidad de agua que podrá almacenar será de 6000 kg. Si consideramos la densidad del agua 1 kg/litro, el tiempo que tardará en vaciarse será de:

6000kg=(20 litros/minuto) (1kg/litro) t_M. t_M = 6000/20 = 300 minutos = 5 horas,

que corresponde a la propuesta a. La velocidad máxima deberá corresponder a la que lleve después de 5 horas, que es cuando está vacío.

Si la masa inicial del camión con toda el agua es m_0, al cabo de un tiempo t su masa es m_0-nt y su velocidad la designamos por v, cuando pase un tiempo Δt , la masa es m_0-nt-Δm y su velocidad v+Δv



$$(m-nt)v = (m-nt-\Delta m)(v+\Delta v) - \Delta m(u-v) \Rightarrow$$

$$mv - ntv = mv + m\,\Delta v - ntv - nt\,\Delta v - \Delta m\,v - \Delta m\,\Delta v - \Delta m\,u + \Delta m\,v \Rightarrow$$

$$0 = m\Delta v - nt\Delta v - \Delta m\,u - \Delta m\,\Delta v = m\Delta v - nt\Delta v - n\,\Delta t - \Delta m\,\Delta v$$

Si Δt tiende a dt , el término Δm Δv es despreciable y Δv es dv

$$dv(m_o - nt) = nu\,dt \Rightarrow \quad \int dv = \int \frac{nu}{m_o - nt}dt \quad \Rightarrow \quad v = -u\ln(m_o - nt) + Cte$$

Para determinar la constante : Cuando t=0 , v = v_o (velocidad inicial)

$$v_o = -u\ln m_o + Cte \Rightarrow v = v_o - u\ln(m_o - nt) + u\ln m_0 \Rightarrow$$

$$v = v_o + u\ln\frac{m_o}{m_o - nt}$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación de la velocidad, para t=300 min ,y como u= 1m/s = 3,6 km/h ,

$$v = 10 + 3{,}6\ln\frac{12000}{12000 - 20\cdot 300} = 12{,}5\frac{km}{h}$$

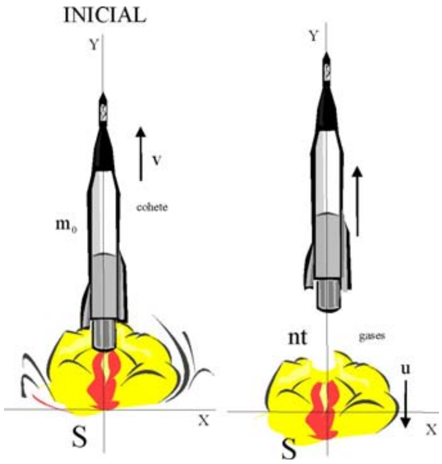
La aceleración media se puede calcular:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t} = \frac{(12{,}5-10)}{5} = 0{,}5\ km.h^{-2} = 3{,}85.10^{-5}\ ms^{-2}$$

La velocidad del camión a las dos horas de recorrido será, sustituyendo en la ecuación de la velocidad

$$v_{2horas} = 10 + 3{,}6\cdot\ln\frac{12000}{12000 - (20\cdot 2\cdot 60)} = 10{,}8\frac{km}{h}$$

Por lo tanto sólo son correctas las propuestas a ,b y d.

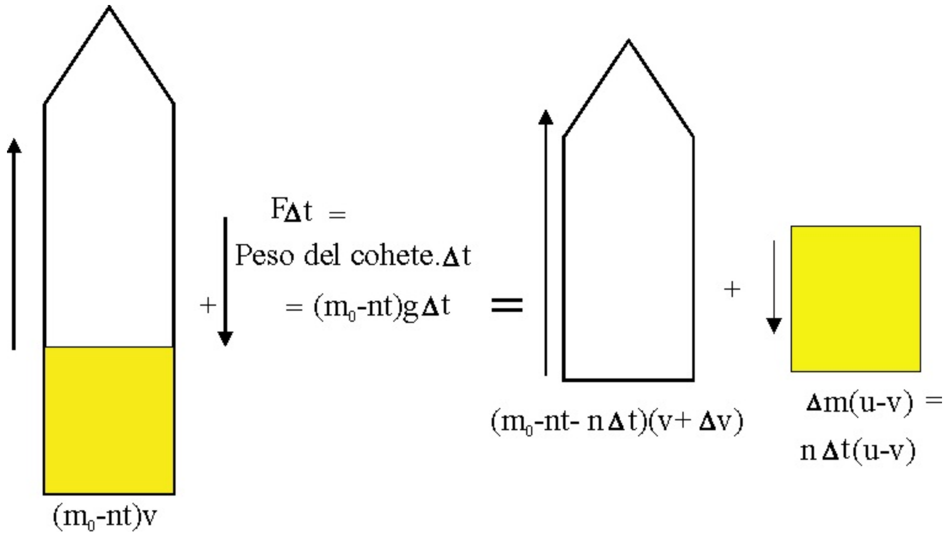


3.3.36.* El movimiento de los cohetes interplanetarios se basa en el efecto de la propulsión a chorro, aplicado a los motores de avión a partir de 1941, esto es los gases producidos en la combustión de del propelente, las tres cuartas partes de la masa total m_0, salen con una velocidad **u** respecto a la del cohete, con lo cual éste va incrementando su velocidad. Si la masa antes de la expulsión de gases a un ritmo de n kg/s, es m_0, podrás decir que en el campo gravitatorio terrestre (suponiendo las variaciones de g =9,8 m/s², despreciables) así como la resistencia del aire

a) EL MOVIMIENTO QUE REALIZA EL COHETE INICIALMENTE ES UNIFORMEMENTE RETARDADO
b) SÓLO EL MOVIMIENTO SERÁ UNIFORMEMENTE RETARDADO AL CABO DE UN TIEMPO $t= 3m_0/4n$
c) EL COHETE TIENE SU VELOCIDAD MÁXIMA AL SALIR
d) LA MÁXIMA VELOCIDAD ES 1,39 $\vec{u}$.

SOL:

En el tiempo t la masa del cohete más el combustible es la masa inicial menos la masa perdida en ese tiempo: m_o-nt y su velocidad v. Transcurrido un tiempo Δt el cohete pierde masa, aumenta su velocidad y expulsa una masa de gases, tal como indica el esquema siguiente:



Aplicando el principio del impulso y del momento lineal

$$(m_o - nt)v - (m_o - nt)g\,\Delta t = (m_o - nt - n\,\Delta t)(v + \Delta v) - n\Delta t(u - v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -g(m_o - nt)\Delta t = (m_o - nt)\Delta v - nu\Delta t - \Delta v\,\Delta t$$

Si Δt tiende a dt , el término Δv Δt es despreciable y Δv es dv

$$-g(m_o - nt)dt = (m_o - nt)dv - n\,u\,dt \Rightarrow dv = dt\left(\frac{nu}{m_o - nt} - g\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \int \frac{nu}{m_o - nt}dt - \int g\,dt \Rightarrow v = -u\ln(m_o - nt) - gt + Cte$$

Para determinar la constante : Cuando t=0 , $v=v_o=0$ (velocidad inicial)

$$v_o = -u\ln m_o + Cte \quad \Rightarrow \quad v = u\ln\frac{m_o}{m_o - nt} - gt$$

La ecuación anterior nos indica que v no es función lineal del tiempo, por tanto, la opción a) es falsa .

Veamos ahora la masa del cohete cuando $t=3m_o/4n$

$$m = m_o - nt = m_o - n\frac{3m_o}{4n} = \frac{1}{4}m_o$$

Se han gastado de combustible ¾ m_o y según el enunciado de la prueba se ha agotado el combustible, por tanto u=0 y v=-gt, lo que quiere decir que el movimiento es uniformemente retardado , la opción b es cierta

Siempre que el cohete tenga combustible la velocidad aumentará, y cuando éste se agote empieza un movimiento uniformemente retardado, luego la máxima velocidad ocurre cuando $t=3m_o/4n$ .Sustituyendo este valor en la ecuación de la velocidad

$$v = u\ln\frac{m_O}{m_O - n\frac{3m_O}{4n}} - g\frac{3m_O}{4n} = u\ln 4 - 9{,}8\cdot 3\frac{m_O}{4n} = 1{,}39u - 7{,}35\frac{m_O}{4n}$$

Valor que no coincide con la propuesta d) que es falsa .La propuesta c) es falsa puesto que el cohete parte del reposo.

3.3.37. Los cohetes interplanetarios, van quemando combustible, frecuentemente oxígeno e hidrógeno líquido, que produce unos gases que salen con una velocidad constante $\vec{u}$, respecto a la del cohete y por lo tanto su masa disminuirá. En ausencia de interacciones gravitatorias, cuando su masa sea la cuarta parte de la inicial, la velocidad del cohete será en valor modular respecto a la de los gases expulsados un número de veces igual a :

a) 1 b) 1,38 c) 0,69
d) 0,1 e) NADA DE LO DICHO

SOL:

Basándonos en la cuestión anterior, utilizamos la ecuación de la velocidad eliminando la interacción gravitatoria

$$v = u\ln\frac{m_o}{m_o - nt} = u\ln\frac{m_o}{\frac{1}{4}m_o} = 1{,}39u$$

Es correcta la propuesta b

3.3.38. Cuando la velocidad de un cohete interplanetario fuera de un campo gravitatorio respecto a un observador inercial es igual a la de salida de sus gases, su masa se habrá reducido a:

a) LA MITAD b) LA CUARTA PARTE
c) TRES CUARTAS PARTES d) POCO MAS DE UN TERCIO
d) NADA DE LO DICHO

SOL:

Esta cuestión es semejante a la anterior

$$v = u\ln\frac{m_o}{m_o - nt} \Rightarrow u = u\ln\frac{m_o}{m_o - nt} \Rightarrow 1 = \ln\frac{m_o}{m_o - nt} \Rightarrow m_O - nt = \frac{m_O}{2{,}72} = 0{,}37m_O$$

Solución correcta la d.

3.3.39. Hace algún tiempo hemos observado por la televisión el lanzamiento del primer satélite espacial español, el Hispasat. Al principio parecía que iba muy lento, y después aumentaba su velocidad hasta desaparecer. Si consideramos que el cohete con satélite y combustible tiene una masa inicial de 100t, que las tres cuartas partes de aquella, corresponden al combustible y que su combustión produce unos gases que salen expulsados con una velocidad de 4.000 m/s, respecto al cohete, siendo el gasto de combustible 10000 kg/s, podrás asegurar, por lo tanto, si **g**=9,8 m/s², y despreciamos la resistencia del aire que:

a) LA MÁXIMA VELOCIDAD ALCANZADA SERÍA 5472 m/s.
b) AL CABO DE 1s, SU VELOCIDAD ERA TAN SOLO DE 412 m/s.
c) EL TIEMPO DE COMBUSTIÓN DE LOS GASES FUE DE 7,5s.
d) LA MITAD DE LA VELOCIDAD MÁXIMA SE VERIFICA EN EL TIEMPO 3,75 SEGUNDOS
e) LA ACELERACIÓN DEL HISPASAT, MIENTRAS QUEMA COMBUSTIBLE, ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL TIEMPO.

SOL:

Dado que el combustible constituye las tras cuartas partes de la masa del sistema

$$m = m_O - nt \Rightarrow \frac{1}{4} m_O = m_O - nt \Rightarrow t = \frac{3}{4}\frac{m_O}{n} = \frac{3 \cdot 100000}{4 \cdot 10000} = 7{,}5s$$

A los 7,5 segundos se ha gastado todo el combustible y en ese instante la velocidad es máxima. Sustituyendo este tiempo en la ecuación de la velocidad

$$v = u \ln \frac{m_o}{m_O - nt} - gt = 4000 \ln \frac{100000}{\frac{1}{4}100000} - 9{,}8 \cdot 7{,}5 = 5472 \frac{m}{s},$$

que corresponde a la solución <u>a</u>.

La velocidad al cabo de 1s , se calcula con la ecuación anterior

$$v = u \ln \frac{m_o}{m_O - nt} - gt = 4000 \ln \frac{100000}{100000 - 10000 \cdot 1} - 9{,}8 \cdot 1 = 412 \frac{m}{s}$$

La opción b) es cierta.

$$\frac{v}{u} = \ln \frac{m_O}{m_O - nt} \Rightarrow \quad \frac{5472}{2.4000} = \ln \frac{100000}{100000 - 10000t} \Rightarrow \quad 1{,}98 = \frac{100000}{100000 - 10000t} \Rightarrow$$

$$t = 1{,}78\,s$$

La opción d) es falsa

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(u \ln m_o - u \ln(m_o - nt)\right) = \frac{uv}{m_o - nt}$$

La opción e) es falsa.