3.4. SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS (I)

3.4.1.* Respecto del sistema de referencia del centro de masas (S.R.C.M.) podemos decir que

a) ES INERCIAL EN LOS SISTEMAS AISLADOS
b) EL ORIGEN DEL S.R.C.M. ES EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA
c) EN MUCHOS SISTEMAS EL CENTRO DE MASAS Y EL CENTRO DE GRAVEDAD COINCIDEN
d) EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS DISCRETAS EL ORIGEN DEL S.R.C.M. ESTÁ NECESARIAMENTE LOCALIZADO SOBRE UNA DE LAS PARTÍCULAS
e) EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL LABORATORIO (S.R.L.) ES EL MISMO QUE EL S.R.C.M.

SOL:
Un sistema aislado no sufre interacción con las fuerzas exteriores y en este caso se comporta como un sistema inercial.
En un sistema sometido a un campo gravitatorio uniforme en todo él, el centro de masas y el de gravedad coinciden
Para los sistemas de partículas discretas el centro de masas puede estar fuera de las partículas, por ejemplo en un sistema formado por dos partículas el centro de masas está fuera de ellas, en un punto de la línea recta que une ambas partículas
El sistema de referencia del laboratorio es un sistema inercial diferente del SRCM. El origen del SRCM se localiza respecto de un SRL mediante el vector $\mathbf{r}_{\mathbf{CM}}$ cuya expresión matemática es

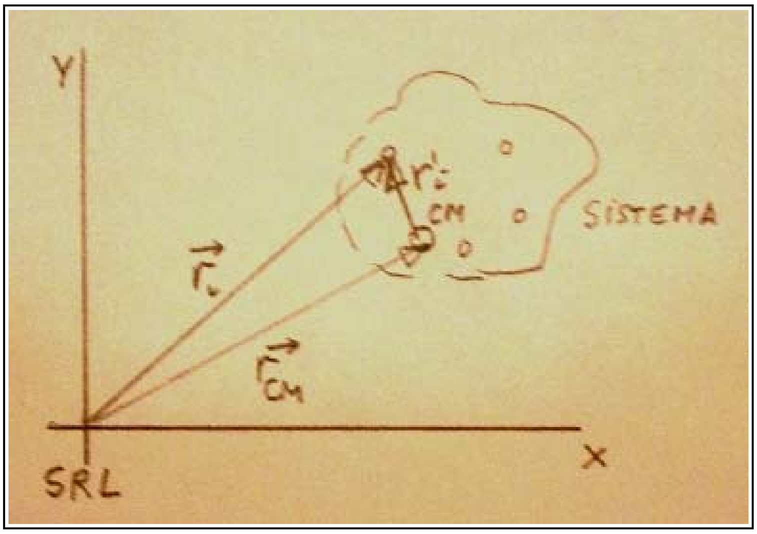
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

En donde m_i es la masa de la partícula i-ésima.
De lo expuesto se deduce que a,b y c son ciertas y falsas d y e.

3.4.2. La cantidad de movimiento de un sistema de partículas <u>referido al sistema del centro de masas</u> es:

a) $M\vec{v}_{CM}$, SIENDO M LA MASA DEL SISTEMA Y $\vec{v}_{CM}$ SU VELOCIDAD EN UN SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO
b) LA MISMA QUE SI SE TOMA COMO REFERENCIA UN SISTEMA INERCIAL CUALQUIERA
c) NULA
d) VARÍA CON EL TIEMPO

SOL:
El sistema de referencia del centro de masas es útil en el estudio del sistema porque, entre otras propiedades, la cantidad de movimiento del sistema respecto de él es nula. Veamos por qué



De la figura se deduce que

$$\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,\prime} = \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\left(\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i^{\,\prime}\right)}{\sum m_i} =$$

$$\frac{\vec{r}_{CM}\sum m_i}{\sum m_i} + \frac{\sum m_i \vec{r}_i^{\,\prime}}{\sum m_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM} + \frac{\sum m_i \vec{r}_i^{\,\prime}}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{\sum m_i \vec{r}_i^{\,\prime}}{\sum m_i} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum m_i \vec{r}_i^{\,\prime} = 0 = \vec{p}^{\,\prime}$$

La única solución válida es la <u>c</u>.

3.4.3. El sistema de referencia del centro de masas suele denominarse a veces, sistema de momento lineal nulo, esto se debe a que en él:

a) LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE CADA UNO LOS PUNTOS MATERIALES ES SIEMPRE 0
b) TODOS LOS PUNTOS MATERIALES REFERIDOS ESTÁN EN REPOSO
c) TODOS LOS PUNTOS MATERIALES TIENEN IGUAL MOMENTO LINEAL
d) LA SUMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE TODOS LOS PUNTOS ES NULA
e) TODOS LOS PUNTOS MATERIALES TIENEN LA MISMA MASA

SOL:
La cantidad de movimiento fue enunciada por Descartes en 1644, llamada por Newton, momentum en 1686 y posteriormente denominada momento lineal para diferenciarla del momento angular,e incluso ímpetu, por ello si el S.R.C.M. tiene una cantidad de movimiento nula, justificado en la cuestión anterior, también podrá denominarse sistema de momento lineal nulo. Por ello la única respuesta correcta es la d.

3.4.4. * Las magnitudes físicas relativas a un sistema de puntos materiales que tienen el mismo valor cuando se miden desde un sistema de referencia de laboratorio o desde un sistema de referencia del centro de masas pueden ser:

a) LA MASA DE LOS PUNTOS MATERIALES
b) LA DISTANCIA DE CADA PARTÍCULA AL ORIGEN DE CUALQUIER SISTEMA
c) LAS FUERZAS QUE ACTUEN EXTERNAMENTE
d) LA VELOCIDAD CON QUE SE DESPLAZAN
e) LA ENERGÍA CINÉTICA

SOL:
Parece evidente que la masa de cada punto material, y por lo tanto la de todo el sistema de puntos materiales, es una magnitud, que en mecánica no relativista, permanecerá constante independientemente del sistema de referencia tomado. Si sobre dos puntos materiales actúan fuerzas exteriores, estas fuerzas serán independientes del sistema, siendo variables con el tiempo las posiciones, y por lo tanto las velocidades de los puntos materiales y lógicamente sus energías cinéticas. De todo esto se deduce que las únicas propuestas correctas serán la a y la c.

3.4.5. * El sistema de referencia del centro de masas es un sistema de referencia interno de un sistema de partículas que permite justificar acciones interiores que serían inobservables en un sistema de referencia de laboratorio. Sin embargo en un sistema de partículas múltiples en estado de movimiento, el centro de masas con toda la masa del sistema situada en él:

a) TIENE SIEMPRE UN MÓDULO DE LA VELOCIDAD MENOR QUE CUALQUIER PARTÍCULA, EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO
b) TIENE SIEMPRE UN MÓDULO DE LA VELOCIDAD MENOR QUE CUALQUIER PARTÍCULA CUANDO SE FIJA EN EL S.R.C.M.
c) SU VELOCIDAD, MEDIDA EN UN S.R.L., MULTIPLICADA POR LA MASA DEL SISTEMA NOS MIDE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.
d) PERMANECE SIEMPRE EN REPOSO SEA CUAL SEA EL SISTEMA DE REFERENCIA

SOL:
La velocidad del centro de masas de un sistema de puntos materiales referido al SRCM es 0, en consecuencia, cualquier partícula tendrá un módulo de su velocidad mayor que la del centro de masas, tal como se dice en b . Sin embargo si no se centrase en él, el sistema de referencia, o sea en el sistema de referencia de laboratorio, no se podrá asegurar que tenga velocidad con módulo menor que cualquier otra partícula de su sistema, como sugiere a.

La cantidad de movimiento de un sistema de partículas respecto de un SRL es aditivo, esto significa que

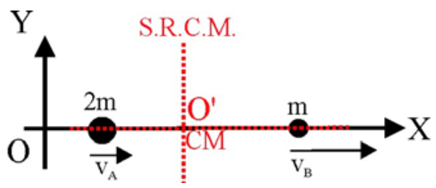
$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i$$

Por otra parte

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM} = \frac{1}{\sum m_i} \cdot d\,\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \dfrac{d\,\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{p}}{\sum m_i} \Rightarrow \vec{p} = \left(\sum m_i\right)\vec{v}_{CM}$$

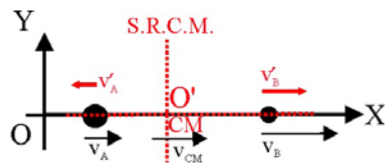
La opción c) es cierta.

De lo anterior se deduce que elegido un SRL adecuado la velocidad no es mula y por tanto la opción d) es incorrecta.



3.4.6. Si dos puntos materiales A y B, se mueven por el eje X, del laboratorio, en su sentido positivo, B con doble velocidad que A, que a su vez, tiene doble masa que B, en el sistema de referencia del centro de masas:

a) A Y B TENDRÍAN IGUAL VELOCIDAD
b) B TENDRÍA DOBLE VELOCIDAD QUE A
c) B TENDRÍA DOBLE VELOCIDAD QUE A PERO CON SENTIDO CONTRARIO
d) A CAMBIARÍA DE SENTIDO SU VELOCIDAD
e) A TENDRÍA DOBLE VELOCIDAD QUE B



SOL:

Supuesto A de masa 2m, con velocidad v**i**, en S.R.L. y B, con masa m y velocidad 2v**i**.

En este sistema de referencia $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \dfrac{2m.v\vec{i} + m.2v\vec{i}}{3m} = \dfrac{4v}{3}\vec{i}$

Como $\vec{r}_A^{\,'} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CM}$, $\vec{r}_B^{\,'} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CM}$ y $\vec{v}^{\,'} = \dfrac{d\vec{r}^{\,'}}{dt}$, $\vec{v}_A^{\,'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM}$, y $\vec{v}_B^{\,'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM}$ y por lo tanto en un S.R.C.M, $\vec{v}_A^{\,'} = v\vec{i} - \dfrac{4v}{3}\vec{i} = -\dfrac{v}{3}\vec{i}$, $\vec{v}_B^{\,'} = 2v\vec{i} - \dfrac{4v}{3}\vec{i} = \dfrac{2v}{3}\vec{i}$. La única respuesta correcta es la <u>d</u>.

3.4.7.* Cuando un sistema de partículas está constituido por sólo dos, A y B, es muy conveniente emplear el concepto de masa reducida μ, esto es, el producto de sus masas dividido por la suma de ellas, y considerarlo como si se tratara de una sola partícula, que se moviera con la velocidad relativa de una partícula respecto a la otra. Usando estos términos, podrás asegurar que en el sistema de referencia del centro de masas:

a) $m_A\vec{v}_A^{\,'} = \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$ b) $m_B\vec{v}_B^{\,'} = \mu(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$
c) $m_A\vec{v}_B^{\,'} = \mu(\vec{v}_A + \vec{v}_B)$ d) $m_B\vec{v}_B^{\,'} = \mu(\vec{v}_B + \vec{v}_A)$
e) $m_A\vec{v}_A^{\,'} + m_B\vec{v}_B^{\,'} = \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B) + \mu(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$

SOL:

Teniendo en cuenta de que $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}$, y considerando que:

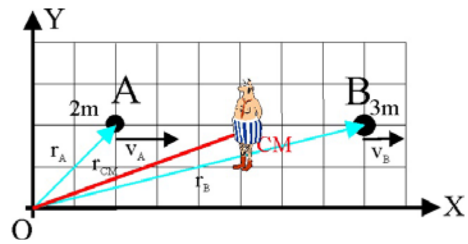
$$\vec{v}_A^{\,'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_A - \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B^{\,'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_B - \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}$$

Las cantidades de movimiento respectivas en el sistema de referencia del centro de masas, serán:

$$m_A\vec{v}_A^{\,'} = m_A\vec{v}_A - m_A\vec{v}_{CM} = m_A\vec{v}_A - \frac{m_A^2\vec{v}_A + m_Am_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{m_Am_B(\vec{v}_A - \vec{v}_B)}{m_A + m_B} = \mu(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

$$m_B\vec{v}_B^{\,'} = m_B\vec{v}_B - m_B\vec{v}_{CM} = m_B\vec{v}_B - \frac{m_B^2\vec{v}_B + m_Am_B\vec{v}_A}{m_A + m_B} = \frac{m_Am_B(\vec{v}_B - \vec{v}_A)}{m_A + m_B} = \mu(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

Por lo tanto las propuestas <u>a</u> y <u>b</u>, son correctas, no siéndolo la c y d. Igualmente también es correcta la <u>e</u>, demostrándose además que dicho sumatorio es nulo.



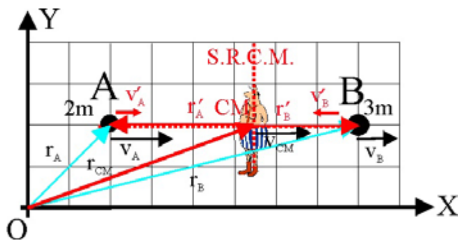
3.4.8. * Dos partículas A y B, de masas 2m y 3m, se encuentran en un sistema de referencia de laboratorio en los puntos respectivos (2,2) y (8,2) en m. Comienzan a moverse con velocidades $3\vec{i}$ y $2\vec{i}$ m/s. Si situáramos un observador en el centro de masas del sistema diría que:

a) A ESTÁ A UNA DISTANCIA DE 3,6m DE ÉL

b) EL VECTOR DE POSICIÓN DE B RESPECTO DEL OBSERVADOR ES: $\vec{r}_B^{\,'} = -2{,}4\vec{i}\ m$

c) B SE ACERCARÍA A ÉL

d) A SE ALEJARÍA DE ÉL CON UNA VELOCIDAD DE $\frac{3\vec{i}}{5}\ ms^{-1}$



SOL:

En el S.R.L.:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B} = \frac{2m.(2\vec{i} + 2\vec{j}) + 3m.(8\vec{i} + 2\vec{j})}{2m + 3m} = \frac{28\vec{i}}{5} + 2\vec{j}\ m$$

Como $\vec{r}_A^{\,'} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CM}$, y $\vec{r}_B^{\,'} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CM}$:

$$\vec{r}_A^{\,'} = (2\vec{i} + 2\vec{j}) - \left(\frac{28\vec{i}}{5} + 2\vec{j}\right) = -\frac{18\vec{i}}{5} = -3{,}6\vec{i}\ m$$

$\vec{r}_B^{\,'} = (8\vec{i} + 2\vec{j}) - \left(\frac{28\vec{i}}{5} + 2\vec{j}\right) = \frac{12\vec{i}}{5} = 2{,}4\vec{i}\ m$, posiciones iniciales respectivas de A y B, en el S.R.C.M. ,al situarse un observador en el origen del S.R.C.M. consideraría que A, está respecto a él a una distancia $|\vec{d}| = |\vec{r}_A^{\,'}| = 3{,}6m$.

Al comenzar a moverse con velocidades $3\vec{i}$ y $2\vec{i}$ en el sistema de referencia de laboratorio: $\vec{v}_{CM} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B} = \frac{2m.3\vec{i} + 3m.2\vec{i}}{5m} = \frac{12\vec{i}}{5}\ ms^{-1}$

$\vec{v}_A^{\,'} = \vec{v}_A - \vec{v}_{CM} = 3\vec{i} - \frac{12\vec{i}}{5} = \frac{3\vec{i}}{5}\ ms^{-1}$ y $\vec{v}_B^{\,'} = \vec{v}_B - \vec{v}_{CM} = 2\vec{i} - \frac{12\vec{i}}{5} = -\frac{2\vec{i}}{5}\ ms^{-1}$

Ello indica tanto A como B, se acercan al observador situado donde el origen.

Son correctas las propuestas a,y c .

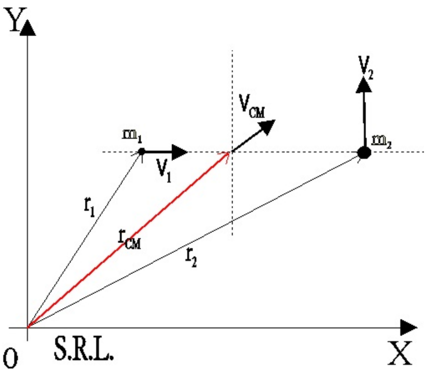
3.4.9.* La velocidad relativa de una partícula A, de masa 2M, respecto a otra partícula B de masa M, en el sistema de referencia del centro de masa es:

a) SIEMPRE MAYOR QUE LA RELATIVA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO

b) IGUAL A LA RELATIVA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO

c) IGUAL EN MÓDULO A LA RELATIVA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO, PERO TIENE SENTIDO CONTRARIO

d) INDEPENDIENTE DE LA MASA DE LAS PARTÍCULAS



SOL:

Dado que los vectores de posición en el sistema de referencia del centro de masas se relacionan con los relativos a un sistema de laboratorio a través de:

$\vec{r}_A^{\,'} = \vec{r}_A - \vec{r}_{CM}$ y $\vec{r}_B^{\,'} = \vec{r}_B - \vec{r}_{CM}$.

Restando ambas tendremos que $\vec{r}_A^{\,'} - \vec{r}_B^{\,'} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ (I).Derivando respecto al tiempo la expresión (I), Dado que $\vec{v}^{\,'} = \frac{d\vec{r}^{\,'}}{dt}$; $\vec{v}_A^{\,'} - \vec{v}_B^{\,'} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ (II).

Por lo tanto la velocidad relativa es independiente del sistema, y por lo tanto igual a la velocidad relativa en el sistema de referencia de laboratorio, y al no depender del vector de posición ni de la velocidad del centro de masa, será independiente de las masas de las partículas. Por lo tanto sólo son correctas las propuestas b y d.

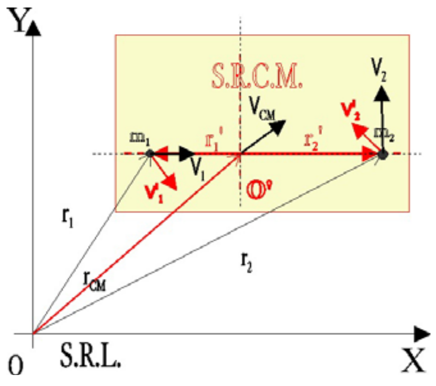
3.4.10. Dos partículas de masas m_1= 1kg y m_2= 3kg se desplazan respecto a un sistema inercial con las velocidades $\mathbf{v}_1$= 4t**i** m/s y $\mathbf{v}_2$= 4t^2**j** m/s. La velocidad de la partícula 1, expresada en m/s, respecto al centro de masas es:

a) $3t\,\vec{i}+3t^2\,\vec{j}$ b) $\vec{i}+3t^2\,\vec{j}$ c) $-3t\,\vec{i}-3t^2\,\vec{j}$ d) CERO

y la de la partícula 2 es:

a) $3t\,\vec{i}+3t^2\,\vec{j}$ b) $-t\vec{i}+t^2\,\vec{j}$ c) $\vec{i}+3t^2\,\vec{j}$ d) CERO

Sol:



En la figura se tienen dos sistemas de referencia, uno inercial (X,Y), y otro ligado al centro de masas de un sistema de partículas, $\vec{r}_1$ es el vector que localiza una masa i del sistema respecto del sistema inercial, $\vec{r}_1^{\,\prime}$ localiza a esa partícula desde el sistema centro de masas y $\vec{r}_{CM}$ localiza el centro de masas desde el sistema inercial. De la figura se deduce que:

$\vec{r}_1=\vec{r}_1^{\,\prime}+\vec{r}_{CM}$, si derivamos; $\vec{v}_1=\vec{v}_1^{\,\prime}+\vec{v}_{CM}$ (I)

Análogamente para la partícula 2 $\vec{v}_2=\vec{v}_2^{\,\prime}+\vec{v}_{CM}$

Las últimas ecuaciones relacionan la velocidad medida desde el sistema inercial y desde el sistema ligado al centro de masas. Vamos a calcular la velocidad del centro de masas del sistema

$$\vec{v}_{CM}=\frac{\Sigma M_i\vec{v}_i}{M}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}=\frac{1.4t\,\vec{i}+3.4t^2\vec{j}}{4}=t\vec{i}+3t^2\vec{j}\;ms^{-1}$$

Aplicando la relación (I):

$$\vec{v}_1^{\,'}=\vec{v}_1-\vec{v}_{CM}=4t\vec{i}-\left(t\vec{i}+3t^2\vec{j}\right)=3t\vec{i}-3t^2\vec{j}\;ms^{-1}$$ como indica a.

$$\vec{v}_2^{\,'}=\vec{v}_2-\vec{v}_{CM}=4t^2\vec{j}-\left(t\vec{i}+3t^2\vec{j}\right)=-t\vec{i}+t^2\vec{j}\;ms^{-1}$$, como se sugiere en b.

3.4.11.* Tres partículas de masas A, B y C, de masas respectivas, m, 2m y 3m, se encuentran en reposo, en un sistema de referencia de laboratorio en los puntos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1). Sobre ellas e independientemente actúan las fuerzas exteriores: $\vec{F}_A=-2m\vec{i}\;N$, $\vec{F}_B=-2m\vec{j}\;N$ y $\vec{F}_C=-2m\vec{k}\;N$. De este sistema, cuyas magnitudes están medidas en el S.I., podrás decir que:

a) SU CENTRO DE MASAS NO SE MUEVE
b) EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO, LA VELOCIDAD DE A RESPECTO DE B, AL CABO DE 0,1s ES - $-0{,}2\vec{i}+0{,}1\vec{j}\;ms^{-1}$
c) LA VELOCIDAD DE A EN EL SISTEMA DEL CENTRO DE MASAS TIENE POR MÓDULO APROXIMADAMENTE 0,18 m/s
d) LA VELOCIDAD DE A RESPECTO A B AL CABO DE 0,1s EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS ES $-0{,}1\vec{i}\;ms^{-1}$
e) LA POSICIÓN DE C RESPECTO AL CENTRO DE MASAS AL CABO DE 1s ES $-0{,}17\vec{j}+0{,}4\vec{k}\;m$

SOL:

Los vectores de posición de A,B y C, en el sistema de referencia de laboratorio son :

$\vec{r}_A=\vec{i}$, $\vec{r}_B=\vec{j}$ y $\vec{r}_C=\vec{k}$, y por lo tanto:

$$\vec{r}_{CM}=\frac{m_A\vec{r}_A+m_B\vec{r}_B+m_C\vec{r}_C}{m_A+m_B+m_C}=\frac{m.\,\vec{i}+2m.\vec{j}+3m.\vec{k}}{6m}=\frac{\vec{i}}{6}+\frac{\vec{j}}{3}+\frac{\vec{k}}{2}\;m$$

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_A}{m} = \frac{-2m\vec{i}}{m} = -2\vec{i}\ ms^{-2} \quad \vec{a}_B = \frac{\vec{F}_B}{2m} = \frac{-2m\vec{j}}{2m} = -\vec{j}\ ms^{-2}$$

$$\vec{a}_C = \frac{\vec{F}_C}{3m} = \frac{-2m\vec{k}}{3m} = \frac{-2\vec{k}}{3}\ ms^{-2}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m_A\vec{a}_A + m_B\vec{a}_B + m_C\vec{a}_C}{m_A + m_B + m_C} = \frac{m.-2\vec{i} + 2m.-\vec{j} + 3m.\frac{-2\vec{k}}{3}}{6m} = -\frac{\vec{i}}{3} - \frac{\vec{j}}{3} - \frac{\vec{k}}{3}\ ms^{-2}$$

$\vec{v}_A = -2\vec{i}\,t = -0{,}2\vec{i}\ \ ms^{-1}$, $\vec{v}_B = -\vec{j}t = -0{,}1\vec{j}\ \ ms^{-1}$, Por lo tanto la velocidad de A respecto a B: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = -0{,}2i + 0{,}1\vec{j}\ \ ms^{-1}$

La opción b) es cierta.

La velocidad del centro de masas del sistema en función del tiempo es

$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_{CM(0)} + \vec{a}_{CM}t = \left(-\frac{\vec{i}}{3} - \frac{\vec{j}}{3} - \frac{\vec{k}}{3}\right)t\ ms^{-1}$ En consecuencia el centro de masas se desplaza y por tanto la opción a) es falsa.

La velocidad del centro de masas cuanto t=0,1 s vale

$$\vec{v}_{CM}(t = 0{,}1s) = \left(-\frac{0{,}1\vec{i}}{3} - \frac{0{,}1\vec{j}}{3} - \frac{0{,}1\vec{k}}{3}\right)ms^{-1}$$

En el sistema de referencia del c.d.m. **v'**$_A$= **v**$_A$-**v**$_{CM}$= - 2t**i** - (- **i**/3 - **j**/3 -**k**/3)t.

Al cabo de 0,1s:

$$\vec{v}'_A(t = 0{,}1s) = \vec{v}_A(t = 0{,}1s) - \vec{v}_{CM}(t = 0{,}1s) = -0{,}2\vec{i} - \left(-\frac{0{,}1}{3}\vec{i} - \frac{0{,}1}{3}\vec{j} - \frac{0{,}1}{3}\vec{k}\right) =$$

$$= -0{,}17\vec{i} + 0{,}033\vec{j} + 0{,}033\vec{k}\ ms^{-1}$$

$$v'_A = \sqrt{(-0{,}17)^2 + (0{,}033)^2 + (0{,}033)^2} \approx 0{,}18\frac{m}{s}$$

La opción c) es correcta.

$$\vec{v}'_B(t = 0{,}1s) = \vec{v}_B(t = 0{,}1s) - \vec{v}_{CM}(t = 0{,}1s) = -0{,}1\vec{j} - \left(-0{,}033\vec{i} - 0{,}033\vec{j} - 0{,}033\vec{k}\right) =$$
$$= 0{,}033\vec{i} - 0{,}067\vec{j} + 0{,}033\vec{k}\ ms^{-1}$$

La velocidad de A respecto a la de B en el S.R.C.M.

$$v'_{AB}(t = 0{,}1s) = v'_A(t = 0{,}1s) - v'_B(t = 0{,}1s) = -0{,}17\vec{i} + 0{,}033\vec{j} + 0{,}033\vec{k} -$$
$$- 0{,}033\vec{i} + 0{,}067\vec{j} - 0{,}033\vec{k} = -0{,}20\vec{i} + 0{,}1\vec{j}$$

La opción d) es incorrecta.

La posición de C respecto de SRCM

$$\vec{r}'_C = \vec{r}_C - \vec{r}_{CM} = \vec{r}_C(t = 0) + \frac{1}{2}\vec{a}_C t^2 - \vec{r}_{CM}(t = 0) + \frac{1}{2}\vec{a}_{CM} t^2$$

Cuando t=1 s

$$\vec{r}'_C(t = 1s) = \vec{r}_C(t = 0) + \frac{1}{2}\vec{a}_C - \vec{r}_{CM}(t = 0) - \frac{1}{2}\vec{a}_{CM} = \vec{k} + \frac{1}{2}\left(-\frac{2\vec{k}}{3}\right) -$$

$$-\left(\frac{\vec{i}}{6} + \frac{\vec{j}}{3} + \frac{\vec{k}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\vec{i}}{3} - \frac{\vec{j}}{3} - \frac{\vec{k}}{3}\right) = \frac{2\vec{k}}{3} - \frac{\vec{i}}{6} + \frac{\vec{i}}{6} - \frac{\vec{j}}{3} + \frac{\vec{j}}{6} - \frac{\vec{k}}{2} + \frac{\vec{k}}{6} = -\frac{1}{6}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} =$$

$$= -0{,}17\vec{j} + 0{,}34\vec{k}$$

La opción e) es falsa.

3.4.12. Un sistema de tres partículas tienen respecto de su centro de masas unas cantidades de movimiento que valen $\vec{p}_1 = 8\vec{i}\ kg.m.s^{-1}$, $\vec{p}_2 = -2\vec{i}\ kg.m.s^{-1}$ y $\vec{p}_3$. El valor de $\vec{p}_3$, expresado en kg.m.s^{-1} es:

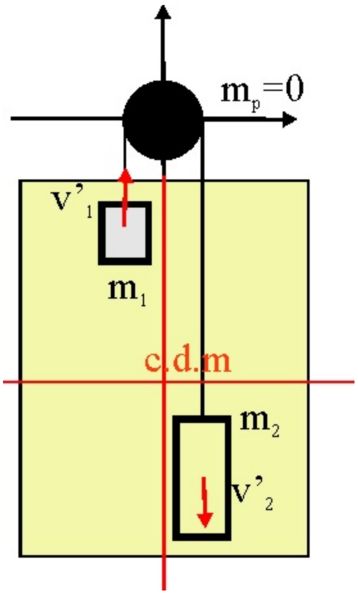
a) $6\vec{i}$ b) $-6\vec{i}$ c) $2\vec{i}$ d) $-2\vec{i}$ e) $-8\vec{i}$

Sol:

La cantidad de movimiento de un sistema respecto de su centro de masas es nulo:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0\ ;\ \vec{p}_3 = -8\vec{i} + 2\vec{i} = -6\vec{i}\ kg.m.s^{-1}$$

3.4.13. En el sistema de la figura la masa m_2 es tres veces mayor que la m_1. La velocidad de la masa m_1, expresada en m/s, respecto del sistema del centro de masas vale al cabo de 5 segundos:



a) $\frac{25}{2}\vec{j}$ b) $\frac{50}{2}\vec{j}$ c) $\frac{75}{2}\vec{j}$ d) CERO

y la de la masa m_2:

a) $-\frac{20}{4}\vec{j}$ b) $-\frac{40}{4}\vec{j}$ c) $-\frac{50}{4}\vec{j}$ d) CERO

tómese g=10ms^{-2}

SOL:

Calculamos el módulo de la velocidad de las masas del sistema:

$$|\vec{a}| = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} g = \frac{g}{2}\ ms^{-2} \qquad |\vec{v}| = \frac{g}{2} t = 25\ ms^{-1}$$

Las expresiones de los vectores velocidad de cada masa a los cinco segundos son:

$$\vec{v}_1 = 25\vec{j}\ m.s^{-1}, \qquad \vec{v}_2 = -25\vec{j}\ m.s^{-1}$$

y la del centro de masas del sistema

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m.25\vec{j} + 3m.(-25\vec{j})}{4m} = -\frac{50}{4}\vec{j}\ ms^{-1}$$

Si aplicamos la relación de las velocidades en el SRCM

$$\vec{v}_1^{'} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = 25\vec{j} - \left(-\frac{50}{4}\right)\vec{j} = \frac{75}{2}\vec{j}\ ms^{-1}$$

$$\vec{v}_2^{'} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -25\vec{j} - \left(-\frac{50}{4}\right)\vec{j} = -\frac{50}{4}\vec{j}\ ms^{-1}$$

Sólo serán correctas por lo tanto las propuestas c.

3.4.14. En el ejercicio anterior la cantidad de movimiento del sistema, expresada en kg.m/s (tomando m_1=1kg) respecto del sistema inercial de referencia es:

a) $-20\vec{j}$ b) $-30\vec{j}$ c) $-40\vec{j}$ d) $-50\vec{j}$ e) CERO

y la cantidad de movimiento del sistema ligado al centro de masas vale:

a) $-20\vec{j}$ b) $-30\vec{j}$ c) $-40\vec{j}$ d) $-50\vec{j}$ e) CERO

mientras que la cantidad de movimiento de la masa m_2 respecto del sistema del centro de masas es:

a) $-\frac{25}{2}\vec{j}$ b) $-\frac{75}{2}\vec{j}$ c) $-\frac{125}{2}\vec{j}$ d) $-\frac{150}{2}\vec{j}$ e) CERO

SOL:

La cantidad de movimiento respecto del sistema inercial es:

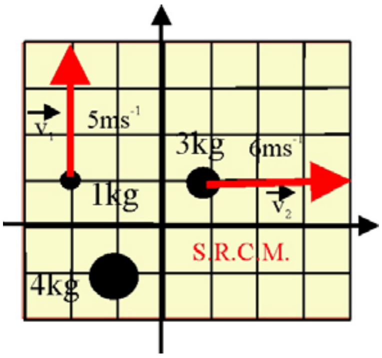
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 1.25\vec{j} + 3.-25\vec{j} = -50\vec{j}\ kg.ms^{-1} = \vec{p}$$

y respecto del sistema ligado al centro de masas es por propia definición de centro de masas cero, $\vec{v}^{'} = \frac{\Sigma m_i \vec{v}_i^{'}}{\Sigma m_i} = 0$, lo cual puede comprobarse sustituyendo valores

$$m_1\vec{v}_1^{'} + m_2\vec{v}_2^{'} = 1.\frac{75}{2}\vec{j} + 3.-\frac{50}{4}\vec{j} = 0$$

La cantidad de movimiento de la masa m_2, respecto del sistema ligado al centro de masas es: $\vec{p}_2^{'} = m_2\vec{v}_2^{'} = 3.\left(-\frac{50}{4}\right)\vec{j} = -\frac{75}{2}\vec{j}\ kg.ms^{-1}$

Soluciones que corresponden a las propuestas d,e y b, de forma sucesiva.



3.4.15. Un sistema de partículas formado por tres de ellas tienen las masas y velocidades expresadas en el dibujo respecto del sistema del centro de masas, se deduce que la velocidad de la tercera partícula, expresada en m/s, respecto al sistema citado es:

a) $-\frac{9}{2}\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}$ b) $\frac{9}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}$

c) $-\frac{9}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}$ d) CERO

SOL:

La cantidad de movimiento respecto del sistema ligado al centro de masas es nulo, luego:

$$\vec{p}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0\,;\ \vec{p}_{CM} = 1.5\vec{j} + 3.6\vec{i} + 4.\vec{v} = 0\,;\ \vec{v} = -\frac{9}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}\ ms^{-1}$$

La propuesta correcta es la c