4.2. FUERZAS Y MOMENTOS EN DINÁMICA DE ROTACIÓN.

4.2.1. El momento de inercia de un cilindro respecto del eje que pasa por el centro de sus bases es $mR^2/2$, siendo m su masa y R el radio. Si se aplica un momento M a un cilindro de masa 0,5 kg y radio 10 cm la aceleración angular resultante es:

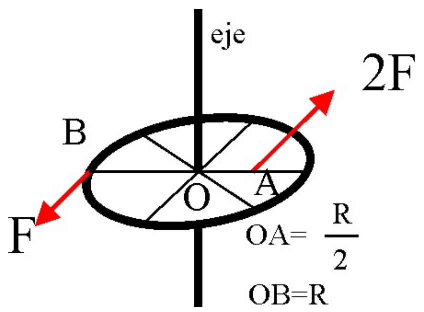
a) 4M b) 40M

c) 400M d) 4000M

SOL:

De acuerdo con la fórmula fundamental de la Dinámica de rotación,

$$M = I\alpha\ ; \quad M = \frac{mR^2\alpha}{2}\ ; \alpha = \frac{M}{2{,}5.10^{-3}} = 400M$$. Es correcta la propuesta c.



4.2.2. Sobre una rueda de masa m concentrada en la periferia y radio R, actúan las fuerzas que se indican en el dibujo; la aceleración angular de la rueda es:

a) nula b) $\frac{2F}{mR}$

c) $\frac{3F}{mR}$ d) $\frac{4F}{mR}$

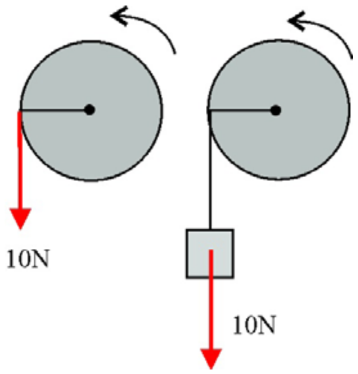
SOL:

Aplicamos la fórmula fundamental de la Dinámica de rotación, M= I$\boldsymbol{\alpha}$. Siendo M el módulo que resulta de sumar vectorialmente los momentos de las dos fuerzas aplicadas, respecto del punto O. Como vectorialmente $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, ambos momentos tienen la misma dirección del eje y sentido hacia arriba, por lo que modularmente:

$$M = R.F + \frac{R}{2}.2F = 2RF$$

El momento de inercia de la rueda es $I = mR^2$; $2RF = mR^2\alpha$; $\alpha = \frac{2F}{mR}$

tal como se propone en b.



4.2.3. Sobre un mismo cilindro de masa M y radio R pueden actuar o una fuerza constante de 10N o un peso de 10N, (cuya masa la aproximamos a 10 kg) la relación entre las aceleraciones en el primer caso respecto del segundo es:

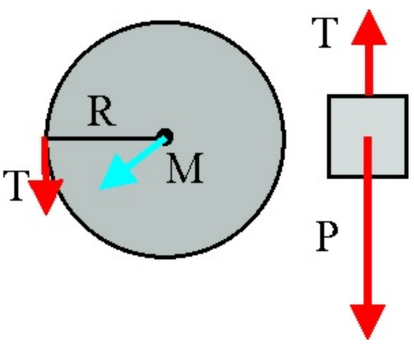
a) 1 b) 2 c) 3

d) 1+20R/(Mg) e) 1+20/(gM)

SOL:

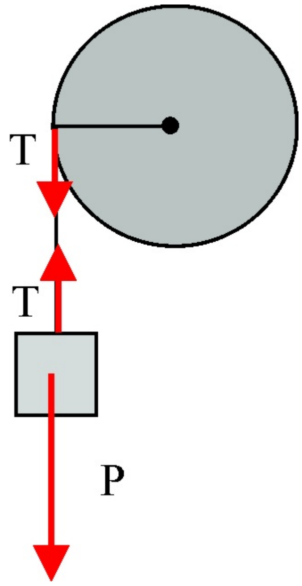
Para el primer caso el momento que produce la fuerza en el cilindro es 10R y de acuerdo con la ecuación fundamental de la Dinámica de rotación, la aceleración es: $10R = I\alpha_1$; $\alpha_1 = \frac{10R}{I}$

En el segundo caso el momento que produce la rotación es T.R siendo T la tensión de la cuerda cuando el peso de 10 N desciende. En la figura se han dibujado los diagramas de fuerzas y momento para el peso descendente y el cilindro. Las tres ecuaciones son:



$$P - T = \frac{10}{g}a\ ; \quad R.T = I\alpha_2\ ; \quad a = \alpha_2 R$$

$T = 10 - \frac{10}{g}\alpha_2 R$; que sustituida en la del medio queda: $10R - \frac{10}{g}\alpha_2 R^2 = I\alpha_2$



$$\alpha_2 = \frac{10R}{I + \dfrac{10R^2}{g}}$$

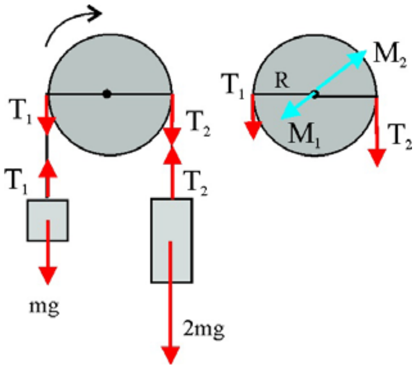
Comparando las dos aceleraciones resulta:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\dfrac{10R}{I}}{\dfrac{10R}{I + \dfrac{10R^2}{g}}} = 1 + \frac{10R^2}{Ig} = 1 + \frac{20}{Mg}$$

tal como dice e

4.2.4. Por la garganta de una polea fija de radio R pasa una cuerda de masa despreciable. De los extremos de la misma se cuelgan dos cuerpos, uno de masa m y el otro 2m. La aceleración con que se desplazan los cuerpos es g/9, por lo que el momento de inercia de la polea es:

a) $6mR^2$ b) $14mR^2$ c) $16mR^2$ d) $18m^2$



SOL:

La ecuación de la masa m en su ascenso es T_1- mg = ma (1) y la de la masa 2m en su descenso es 2mg-T_2 = 2ma (2). Los momentos, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{T}$, que actúan sobre la polea son en módulo M_1 = R.T_1 y M_2= R.T_2, que tienen sentidos contrarios, apuntando M_1 hacia el lector y M_2 en sentido opuesto, siendo el momento resultante M =M_2-M_1 (véase la figura).

La ecuación que rige el movimiento de rotación de la polea es:

$$M_2 - M_1 = R(T_2 - T_1) = I\alpha \quad (3)$$

La relación entre las aceleraciones lineal y angular es $a = \alpha R$ (4). Se sustituye (4) en la ecuación (3) y se despeja de (1) y (2) T_1 y T_2:

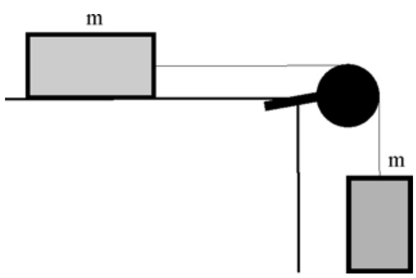
$$T_1 = ma + mg \qquad T_2 = 2mg - 2ma$$

En la ecuación (3) se sustituyen los valores anteriores y se opera:

$$I = \frac{R(2mg - 2ma - ma - mg)}{\dfrac{a}{R}} = \frac{mgR^2 - 3maR^2}{a}$$

pero a= g/9, por lo que

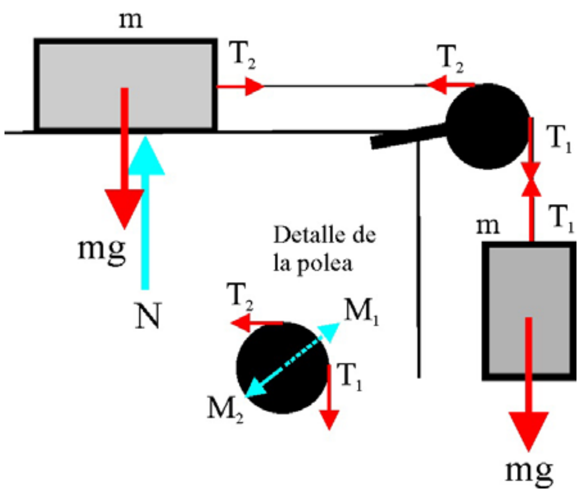
$$I = \frac{mgR^2 - 3maR^2}{a} = \frac{mgR^2 - 3m\dfrac{g}{9}R^2}{\dfrac{g}{9}} = 6mR^2$$



4.2.5. En el sistema de la figura, hay dos masas iguales m unidas por una cuerda que pasa por una polea, siendo M la masa de la polea y R su radio. La aceleración de la masa que cuelga es g/4, por consiguiente el momento de inercia de la polea es:

a) mR^2 b) $2mR^2$ c) $3mR^2$ d) $4mR^2$

SOL:



La tensión de la cuerda no es la misma a ambos lados de la polea <u>por no ser ésta de masa despreciable</u>.

La ecuación del movimiento para la masa horizontal es:

$$T_2 = ma \ (1).$$

Para la masa que desciende, $mg - T_1 = ma$ (2).

Para la polea que da vueltas

$$M_1 - M_2 = R(T_1 - T_2) = I\alpha = \frac{Ia}{R} \quad (3)$$

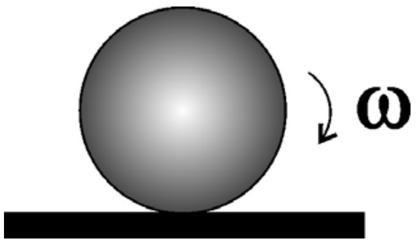
Si se despeja T_1 de la ecuación (2) y T_2 de la (1) y se sustituyen en la tres, se obtiene.

$$R(mg - ma - ma) = Rmg - 2Rma = I\frac{a}{R}$$

puesto que a = g/4, resulta

$$Rmg - 2Rm\frac{g}{4} = \frac{1}{2}Rmg = I\frac{g}{4R} \Rightarrow I = 2mR^2$$

como se propone en b



4.2.6*. Una esfera de radio R rueda sin deslizar con ω constante, por una mesa horizontal:

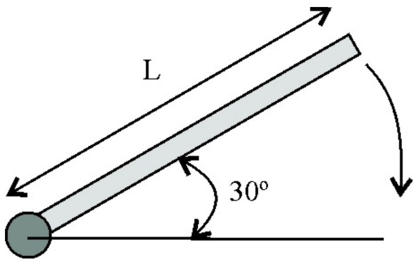
a) EL PUNTO EN CONTACTO CON EL SUELO NO TIENE VELOCIDAD NULA
b) LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS ES IGUAL A LA ANGULAR POR EL RADIO.
c) EL PUNTO EN CONTACTO CON EL SUELO TIENE ACELERACIÓN TANGENCIAL.
d) EL PUNTO EN CONTACTO CON EL SUELO TIENE ACELERACIÓN NORMAL.

SOL:
Cuando hay rodadura el punto en contacto con el suelo no desliza y en consecuencia su velocidad en todo instante es nula, v = 0. Como la velocidad de cualquier punto de la esfera se puede considerar como la suma de la de traslación del centro de masas v_o, más la debida a la rotación con velocidad ω alrededor de un eje que pasa por el centro de masas, $v = \omega \cdot R$; resulta que

$$\vec{v} = 0 = (v_o - \omega \cdot R)\vec{i} \quad \Rightarrow \quad v_o = \omega \cdot R$$

La velocidad del centro de masas es ahora igual a la angular por el radio.

Por otra parte, el punto en contacto con el suelo tiene **v** = 0 y en consecuencia, su aceleración tangencial $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$, también es nula, sin embargo, la aceleración normal vale $a_n = \omega^2 R$ y al ser la velocidad angular ω, en cada instante, la misma para todos los puntos de un sólido rígido, el punto en contacto con el suelo si tiene aceleración normal. Las soluciones correctas son la b) y la d).



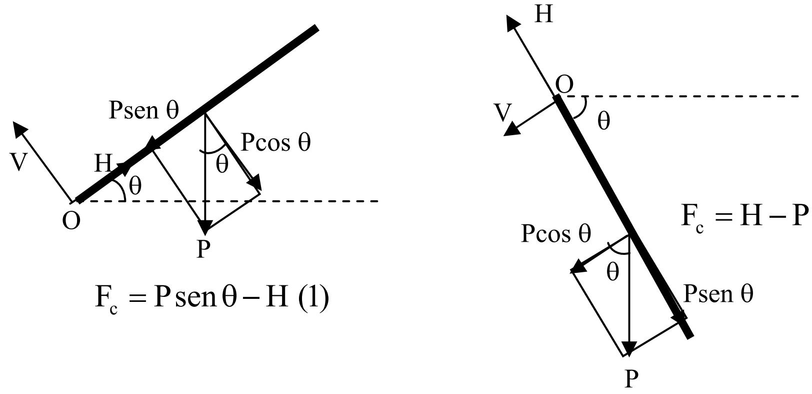
4.2.7. Una varilla uniforme de masa M y longitud L está pivotada en uno de sus extremos y desde la posición indicada en la figura se deja en libertad, cuando la varilla pasa por la posición horizontal la aceleración angular es:

a) g/(2L) b) 3g/(2L) c) 5g/(2L) d) 7g/(2L)

y las reacciones vertical y horizontal de la articulación son:

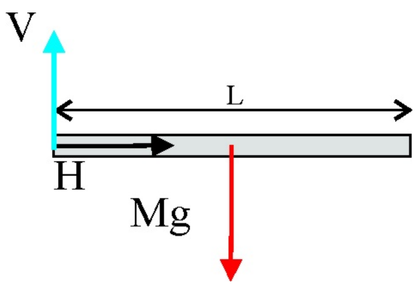
e) Mg/4, 3Mg/4 f) Mg, Mg
g) Mg/4, Mg h) 3/4Mg, 1/8Mg

SOL:
Las fuerzas que actúan sobre la varilla son el peso y las reacciones en O. Se han dibujado en dos posiciones, una por encima y otra por debajo de la horizontal.



$F_c = P\,sen\,\theta - H$ (1)

$F_c = H - P\,sen\,\theta$ (2)



Cuando la varilla pase por la posición horizontal actúan las fuerzas tal como están indicadas en la figura lateral de la izquierda. Los sentidos de las reacciones se deducen de los gráficos
Si consideramos a la articulación O como centro de momentos, resulta que los de V y H son nulos y el de Mg vale Mg.(L/2). De acuerdo con la ley fundamental de la dinámica de rotación; que en la posición horizontal es:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} = I\alpha$$

El momento de inercia de la varilla respecto del extremo es según el teorema de Steiner,

$$I = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

por tanto: $Mg\frac{L}{2} = I\alpha = \frac{ML^2\alpha}{3}$; $\alpha = \frac{3g}{2L}$ Como se propone en b.

En la posición horizontal, la aceleración tangencial del centro de masas tiene dirección vertical y hacia abajo siendo:

$$a_{CM} = \alpha R = \frac{3g}{2L}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3g}{4};\ Mg - V = M.a_{CM} = \frac{3Mg}{4}$$

$$V = \frac{Mg}{4}$$

Sobre el centro de masas de la varilla actúa una fuerza centrípeta que tiene la dirección de ella y sentido hacia la articulación O. En la posición horizontal la fuerza centrípeta es proporcionada por la reacción H y es la que permite el giro de la varilla alrededor de la articulación O, siendo su sentido contrario al que aparece en el dibujo lateral. Para calcular la fuerza centrípeta necesitamos conocer la velocidad de rotación de la varilla al pasar por la posición indicada en la figura y esto lo hallamos aplicando el principio de conservación de la energía;

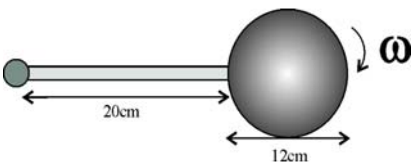
Energía potencial inicial= Energía cinética de rotación

$$Mg\frac{L}{2}sen30° = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\omega^2\ ,\qquad \text{de donde} \qquad \omega^2 = \frac{3g}{2L}$$

Recordando el valor de la fuerza centrípeta:

$F_c = M\omega^2 R = M\frac{3g}{2L}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3Mg}{4}$, valores que corresponden a la propuesta a, para las reacciones.

Por consiguiente el valor de H es las tres cuartas partes del peso de la varilla y dicha fuerza tiene sentido contrario al representado en la figura lateral. Además el valor de V es la cuarta parte del peso de modo que la respuesta correcta es la e.

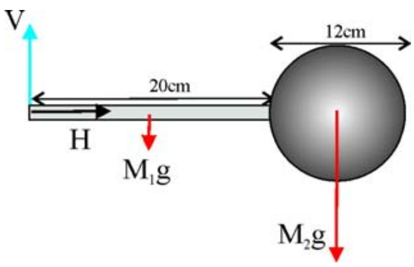


4.2.8. Un sistema está formado por una varilla delgada y uniforme con una esfera en su extremo, tal como indica la figura. La masa de la varilla es 2 kg y la de la esfera 10 kg. El sistema está pivotado en el extremo de la varilla. Cuando el sistema pasa por la posición horizontal posee una velocidad angular de 2 rad/s, por tanto, la aceleración angular de la varilla, expresada en rad/s^2 vale:

a) 39 b) 25 c) 17 d) 8

y las reacciones vertical y horizontal en la articulación son:

e) 12 , 11 f) 20 , 15 g) 15 , 15 h) 40 , 16

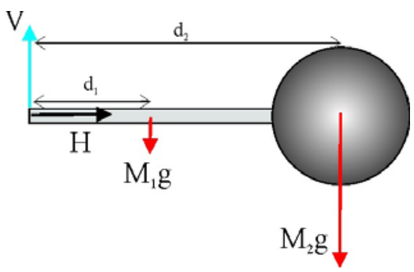


SOL:
En la figura se representan las fuerzas que actúan sobre el sistema cuando éste ocupa la posición horizontal. Tomando la articulación como centro de momentos:

$M_1 g\, d_1 + M_2 g\, d_2 = I\alpha$, d_1= 0,10 m, y d_2= 0,20 m +0,06 m =0,26 m

El momento de inercia del sistema es el de la varilla más el de la esfera. El de la varilla es un tercio de su masa por su longitud al cuadrado:

$$\frac{1}{3}M_1(2d_1)^2 = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 0{,}2^2 = 0{,}0266\,kg.m^2$$



y el de la esfera es de acuerdo con el teorema de Steiner:

$$\frac{2}{5}M_2R^2 + M_2d_2^2 = \frac{2}{5}\cdot 10\cdot 0{,}06^2 + 10\cdot 0{,}26^2 = 0{,}690\,kg.m^2$$

I= 0,0266+0,690= 0,717 kg.m^2

Volviendo a la primera ecuación:

$$\alpha = \frac{M_1 g\, d_1 + M_2 g\, d_2}{I} = \frac{(2\cdot 10\cdot 0{,}1 + 10\cdot 10\cdot 0{,}26)}{0{,}717} = 39\frac{rad}{s^2}$$, como dice a.

Calculamos ahora la posición del centro de masas del sistema respecto de la articulación:

$$d_{CM} = \frac{M_1 d_1 + M_2 d_2}{M_1 + M_2} = \frac{2\cdot 0{,}1 + 10\cdot 0{,}26}{12} = 0{,}23\, m$$

La aceleración lineal del centro de masas está dirigida, en la posición de la figura, verticalmente hacia abajo y vale:

$$a_{CM} = \alpha\, d_{CM} = 39.0{,}23 = 9 \text{ m/s}^2$$

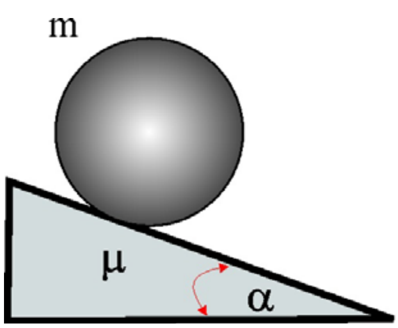
Aplicando la ley fundamental de la Dinámica

$$M_2 g + M_1 g - V = \left(M_1 + M_2\right) a_{CM} \Rightarrow V = 10\cdot 12 - 12\cdot 9 = 12\, N$$

La fuerza horizontal H es precisamente la fuerza centrípeta y su sentido es el contrario al del dibujo. Tomando del enunciado ω = 2 rad/s

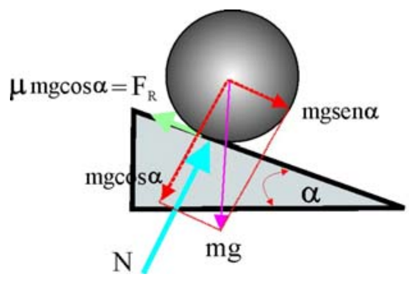
$$H = F_C = M\omega^2 d_{CM} = 12.2^2.0{,}23 = 11 \text{ N}.$$

La segunda propuesta correcta es la e.



4.2.9.* Cuando un cuerpo de masa m rueda sin deslizar por un plano inclinado α grados, con el que tiene un coeficiente de rozamiento μ_ε podrás decir que lo hace:

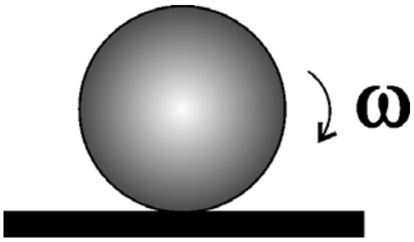
a) POR ACCIÓN DEL CAMPO GRAVITATORIO
b) DEBIDO A LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO
c) A CONSECUENCIA DE LA REACCIÓN QUE EJERCE EL PLANO
d) PORQUE LAS FUERZAS DE ROZAMIENTO SON MENORES QUE $\mu mg\cos\alpha$



SOL:

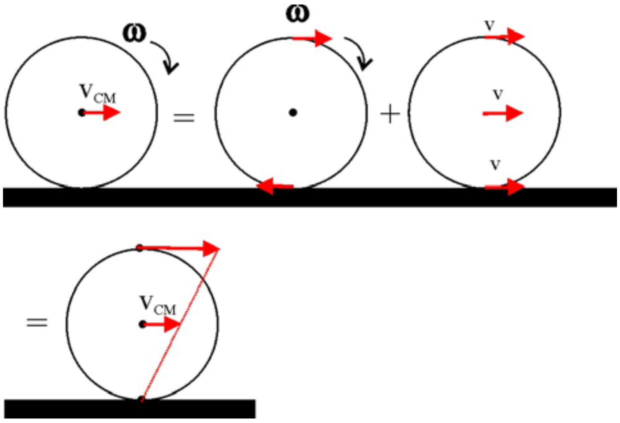
En el dibujo de la figura podremos observar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo capaz de rodar. Descomponemos el peso (acción del campo gravitatorio) en una componente paralela al plano, mg sen **a** y otra perpendicular mg cos **a**, que actúan en el c.d.m. Aparece la fuerza normal, de reacción N, que se opone a $mg\cos\alpha$, de forma que $mg\cos\alpha - N = 0$, y la fuerza de rozamiento que en la rodadura puede ir a favor o en contra de la traslación del c.d.m. . Si el cuerpo rueda sin deslizar, necesita de un momento respecto de su centro de masas, $\vec{M} = \vec{R}\wedge\vec{F}_R$, y la única fuerza que lo va a producir, y que es responsable por lo tanto del giro es la fuerza de rozamiento, dado que las otras pasan por el c.d.m.. El cuerpo para descender ha de girar en sentido horario y para ello F_R debe ir hacia arriba, como se indica en la figura.

Cuando hay rodadura la fuerza de rozamiento vale, F_R<μN< $\mu mg\cos\alpha$. Si la fuerza de rozamiento fuera $F_R = \mu mg\cos\alpha$, entonces se produciría el deslizamiento y no la rodadura. Por lo tanto las soluciones correctas son la a ; b y d.



4.2.10.* Euler supuso en 1760, que el movimiento de rodadura de un sólido por encima de una mesa, se podía descomponer en una rotación simple, en la que todos los puntos de la periferia tenían un módulo de la velocidad angular constante, y una traslación en la que todos los puntos tenían el mismo vector velocidad. Con esta idea:

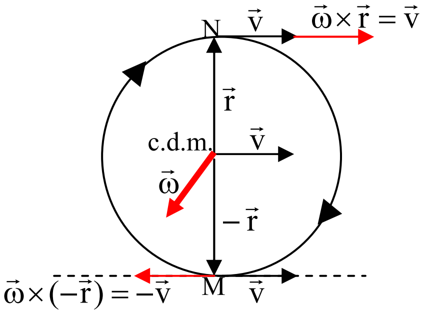
a) HABRÁ PUNTOS DE LA PERIFERIA CON VELOCIDAD 0
b) LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS SIEMPRE ES LA MISMA
c) LA VELOCIDAD DE UN PUNTO DE LA PERIFERIA PUEDE SER EL DOBLE DE LA DEL CENTRO DE MASAS
d) LA TRAYECTORIA DE UN PUNTO DE LA PERIFERIA ES UNA CIRCUNFERENCIA

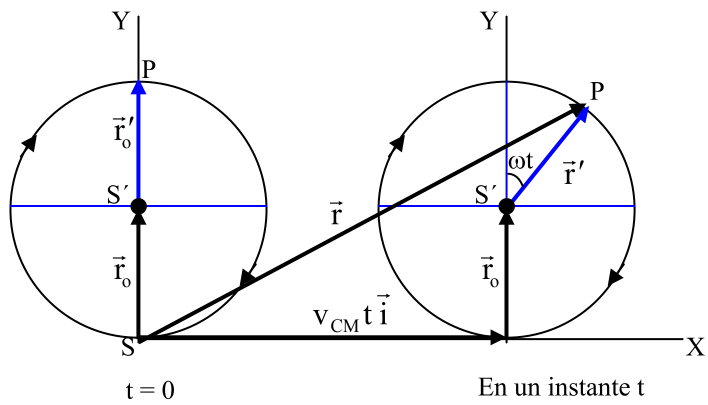


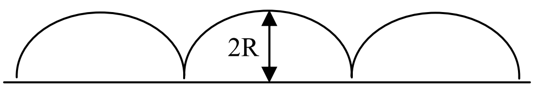
SOL:

Como se observa en el dibujo, la rodadura (combinación de rotación y traslación, cuando se cumple que la velocidad del punto en contacto con el suelo es nula) fue descompuesta por Euler, en una rotación pura con velocidad angular **ω** = v/R, y una traslación pura de todos los puntos del cuerpo con la velocidad del c,d,m, **v** de esa forma en la rodadura, la velocidad de un punto P es, . $\vec{v}_P = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$. El punto de la periferia de la parte más alta N, figura inferior, tendrá una velocidad de módulo v_P=v+v =2v; el c.d.m. será v, y el punto M en contacto con el suelo v_M =v -v =0

La trayectoria de un punto de la superficie corresponde a una curva denominada cicloide.







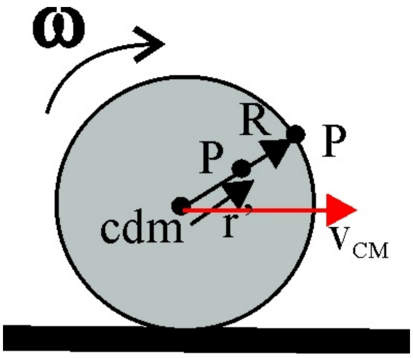
Cicloide.- Trayectoria descrita por un punto de la periferia de un disco, que rueda por un suelo rugoso a velocidad angular constante.

Así si tomamos un sistema de referencia relativo centrado en el centro de masas S', cuyo origen en el instante inicial (t=0) tiene un vector de posición $\vec{r}_0 = R\,\vec{j}$, respecto a un sistema absoluto S, y éste sistema S´ se traslada con velocidad $v_{CM}\,\vec{i}$ .respecto de S.

En un instante posterior t, véase la figura, un punto P tiene un vector de posición respecto de los ejes S´ en el c.d.m. que vale $\vec{r}' = R\,\text{sen}\,\omega t\;\vec{i} + R\,\cos\omega t\;\vec{j}$, y respecto de los ejes fijos en S $\vec{r} = v_{CM}\,t\,\vec{i} + \vec{r}_0 + \vec{r}' = (v_{CM}\,t + R\,\text{sen}\,\omega t)\;\vec{i} + R(1+\cos\omega t)\;\vec{j}$ .Como un vector de posición en coordenadas cartesianas es $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$, identificando las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son: $x = v_{CM}\;t + R\,sen\,\omega t \qquad y = R(1+\cos\omega t)$, corresponde a dicha curva, la cicloide. Por lo tanto son correctas únicamente las propuestas <u>a</u>, <u>b</u> y <u>c</u>.

4.2.11. La aceleración de un punto de la periferia de una esfera que rueda por una mesa:

a) SÓLO TIENE COMPONENTE TANGENCIAL
b) SÓLO TIENE COMPONENTE NORMAL
c) SÓLO PUEDE SER ANGULAR
d) ES NULA SI LA VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASAS ES CONSTANTE
e) TIENE COMPONENTE NORMAL Y TANGENCIAL, SI LA **v**$_{CM}$ NO FUERA CONSTANTE

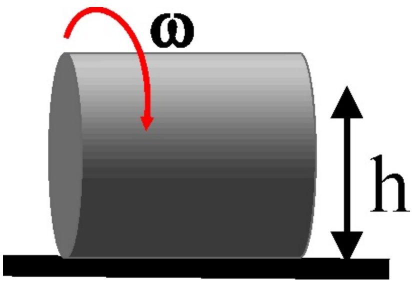


SOL:
Un punto cualquiera P, distinto del c.d.m., de un sólido rígido de radio R, que rueda por una mesa con una velocidad del c,d,m, $\vec{v}_{CM}$, y que está localizado respecto de ejes situados en el c.d.m. por un vector de posición $\vec{r}'$, tiene una velocidad respecto de ejes fijos en el suelo, que viene dada por la ecuación cinemática de velocidades:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

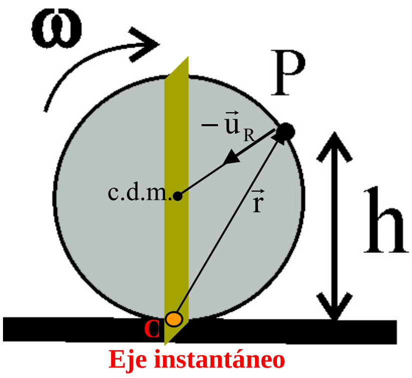
Como $\vec{a}_P = \frac{d\,\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\,\vec{v}_{CM}}{dt} + \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\,\vec{r}'}{dt} = \vec{a}_{CM} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

Cuando P está en la periferia, $\vec{r}' = \vec{R}$, y por rodar $\vec{a}_{CM} = \vec{\alpha} \wedge \vec{R}$ y el punto tiene una aceleración tangencial de módulo $2\alpha R$ y una aceleración normal o centrípeta de módulo $\omega^2 R$. Si el centro de masas se desplaza con $\vec{v}_{CM} = \text{cte}$ resulta que $\vec{a}_{CM} = 0$, y también $\vec{\alpha} = 0$, por lo que el punto sólo tendrá aceleración normal.
La única solución válida es la e.



4.2.12. Cuando un cuerpo rueda sin deslizar por una mesa, con velocidad angular constante, podrás decir que todos los puntos situados a igual altura h sobre dicha mesa tienen:
a) EL MISMO VALOR DE LA VELOCIDAD LINEAL
b) LA MISMA VELOCIDAD ANGULAR
c) LA MISMA ACELERACIÓN TANGENCIAL
d) LA MISMA ACELERACIÓN NORMAL
e) LA MISMA ACELERACIÓN ANGULAR

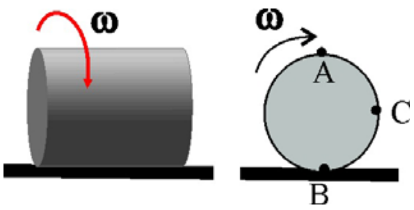
SOL:



Considerando las cuestiones anteriores, la velocidad de un punto P de la periferia de un cuerpo que rueda sobre una mesa, por ejemplo, un cilindro, situado en un momento determinado a una altura h de la mesa, como se observa en el dibujo, tiene una velocidad, que se puede expresar también, como una rotación pura alrededor del eje instantáneo, (que está situado en la línea recta de contacto del cilindro con el suelo, punto O), con velocidad angular $\vec{\omega}$. En este caso, si $\vec{r}$ es el vector de posición respecto del eje instantáneo, al tratarse de una rotación pura resulta para la velocidad de P, $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

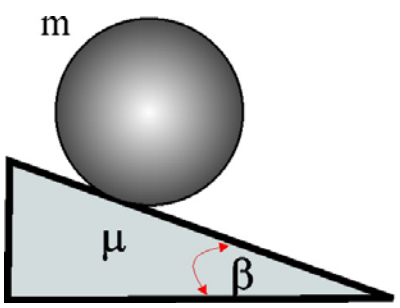
Siendo $\vec{\omega}$ constante, la velocidad lineal $\vec{v}_P$ sólo tendrán igual valor en aquellos puntos que cumplan las siguientes condiciones: 1) el vector de posición $\vec{r}$ sea el mismo, respecto de cada punto del eje instantáneo, 2) están a la misma altura sobre la superficie de la mesa, 3) en el mismo lado respecto de un plano vertical que pase por el eje instantáneo y que contenga al c,d,m, como se puede observar en el dibujo, por ello la solución a es incorrecta. La solución b es correcta pues todos los puntos de un sólido rígido en rotación tienen la misma velocidad angular. En el enunciado de la prueba se dice que $\omega = cte$ y en consecuencia $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$ y la solución e es incorrecta.

Como por otra parte la aceleración tangencial $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = 0$ y al no haber aceleración tangencial la solución c es incorrecta. En cuanto a la aceleración normal $\vec{a}_n = -\omega^2 R \vec{u}_R$ siendo $-\vec{u}_R$ un vector unitario dirigido desde P hacia un punto de un eje paralelo al instantáneo, y que pasa por el c.d.m. De manera que solo los puntos con la misma altura **h** y situados al mismo lado del plano vertical, tendrán la misma aceleración normal, y en consecuencia la respuesta d es incorrecta.



4.2.13. Un cilindro de radio R, cuyo corte aparece en la figura, rueda sin deslizar sobre una mesa, con ω = cte. Respecto de los puntos , A, B y C, podrás decir que:
a) LA VELOCIDAD ANGULAR DE B SIEMPRE ES 0
b) LA VELOCIDAD LINEAL DE C ES DOBLE QUE LA DE B
c) EL MÓDULO DE LA ACELERACIÓN NORMAL DE A ES IGUAL A LA DE B
d) LA ACELERACIÓN DE A ES DOBLE QUE LA DE B
SOL:
Como en el caso anterior, y aplicando los mismos argumentos, dado que en una rotación todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad angular, la propuesta a es errónea. Respecto al punto B, como centro instantáneo de rotación con velocidad lineal $\vec{v}_B = 0$, $\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}$, siendo $\vec{v}_{CM}$ la velocidad del c.d.m. por lo tanto también es errónea la propuesta b. La aceleración normal o centrípeta de todos los puntos situados en la periferia del cilindro vale en módulo $\omega^2 R$, y es la misma, por ello la propuesta c es correcta. En cuanto a la aceleración al ser ω= cte; solo existe la normal que es la misma para todos los puntos de la periferia, en consecuencia la solución d es incorrecta..

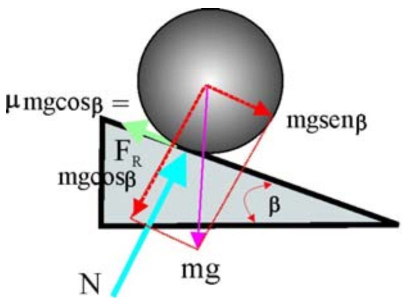
4.2.14. En el estudio de la dinámica de rotación de un cuerpo es muy importante el concepto de eje instantáneo de rotación. Si supones una esfera que rueda sin deslizar por una mesa, su eje instantáneo será un eje:
a) QUE PASA POR EL CENTRO DE MASAS PARALELO AL SUELO Y PERPENDICULAR A LA DIRECCIÓN DE AVANCE DE AQUÉL
b) QUE PASA POR EL PUNTO DE CONTACTO CON EL SUELO Y ES PERPENDICULAR AL MISMO
c) QUE PASA POR EL PUNTO DE CONTACTO Y ES PARALELO AL SUELO
d) LUGAR GEOMÉTRICO DE TODOS LOS PUNTOS CUYA VELOCIDAD ES CERO
e) PERPENDICULAR AL SUELO PASANDO POR EL CENTRO DE MASAS Y POR EL PUNTO DE CONTACTO
SOL:
La velocidad de un punto M, $\vec{v}_M$, de un sólido que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$, que deberá ser común a todos los puntos, y cuyo centro de masas se desplaza con velocidad $\vec{v}_{CM}$, será : $\vec{v}_M = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{R}_M$. Por lo tanto aunque la velocidad angular sea constante, esta suma vectorial es distinta para los diferentes puntos del sólido y habrá puntos cuya velocidad es nula. El lugar geométrico se denomina eje instantáneo de rotación. En una rodadura, son los de contacto con el suelo, y el eje que los contiene, al tener la misma dirección que la velocidad angular, será paralelo a ella. Por ello las únicas respuestas no erróneas son la c y la d.



4.2.15. Si queremos que una esfera de radio R, y masa m, ruede sin deslizar por un plano inclinado, con el cual tiene un coeficiente de rozamiento por deslizamiento de 0,2 hace falta que el ángulo de dicho plano β sea menor de:

a) 30° b) 35° c) 45° d) 60°

SOL:
En el esquema de la figura, observamos las fuerzas que actúan sobre el sistema de la esfera. Descomponemos m**g** , en sus componentes paralela y perpendicular, $mg\,sen\,\beta$ y $mg\cos\beta$, respectivamente.



La $\vec{a}_{CM}$ se calcularía a por aplicación de la segunda ley de Newton:

$$a_{CM} = \frac{mg sen\beta - F_R}{m} \quad (I).$$

La F_R ,a través de: $\vec{M} = I\vec{\alpha}$; en valor modular $R.F_R = \frac{2mR^2}{5}\alpha$;

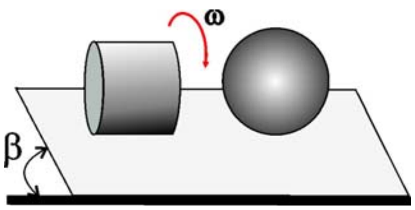
$$F_R = \frac{2mR}{5}\alpha = \frac{2ma_{CM}}{5} \Rightarrow a_{CM} = \frac{5F_R}{2m} = \frac{mg\,sen\,\beta - F_R}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5F_R = 2mg\,sen\,\beta - 2F_R \Rightarrow F_R = \frac{2mg\,sen\,\beta}{7} \quad (ii)$$

Por otra parte para que exista rodadura sin deslizamiento la condición es que $F_R < \mu N = \mu mg\cos\beta$. Sustituyendo el valor obtenido en (II).

$$\frac{2mg\,sen\beta}{7} < \mu\,mg\cos\beta\,; \quad \text{De lo que } \tan\beta < \frac{7\mu}{2} = 0{,}7\ ;.\ \beta = \text{arc tan } 0{,}7 = 35^{o}$$

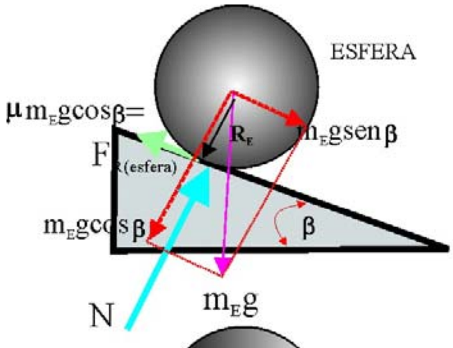
El límite está dado por; $\beta = 35°$ .La respuesta correcta sería la b.



4.2.16. Situados una esfera y un cilindro de la misma masa, en lo alto de un plano inclinado un ángulo β , al dejarlos libres empiezan a rodar.

a) LA FUERZA DE ROZAMIENTO ES NULA.
b) LA FUERZA DE ROZAMIENTO ES IGUAL EN LOS DOS CUERPOS
c) SEA CUALQUIERA EL VALOR DE β SIEMPRE HABRÁ RODADURA SIN DESLIZAMIENTO
d) LA FUERZA DE ROZAMIENTO ES MAYOR SOBRE EL CILINDRO QUE SOBRE LA ESFERA

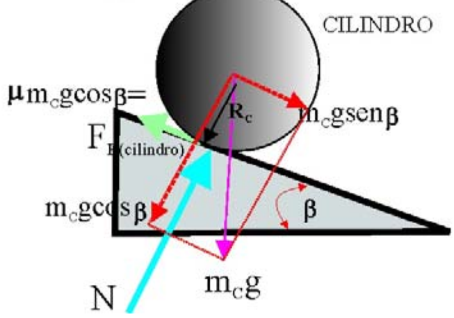
SOL:
Para que un cuerpo ruede sin deslizar por un plano inclinado es necesario que $F_R < \mu N = \mu mg\cos\beta$, siendo β el ángulo del plano inclinado. Como μ depende solamente de la naturaleza del cuerpo y de la superficie sobre la que rueda, es común para esfera y cilindro.
Los condicionamientos de rodadura para la esfera y para el cilindro son, tal como se observa en la figura:



Para la esfera:

$$m_E gsen\beta - F_{R(esfera)} = m_E a_E\,;\ R_E F_{R(esfera)} = I_E \alpha_E\,;\ I_E = \frac{2}{5} m_E R_E^2\,;$$

$$R_E F_{R(esfera)} = \frac{2}{5} m_E R_E^2 \alpha_E\,; F_{R(esfera)} = \frac{2}{5} m_E R_E \alpha_E = \frac{2}{5} m_E a_E\,; a_E = \frac{5F_{R(esfera)}}{2m_E}$$



$$m_E gsen\beta = F_{R(esfera)} + m_E \frac{5F_{R(esfera)}}{2m_E} = \frac{7}{2} F_{R(esfera)} \; ;$$

$$F_{R(esfera)} = \frac{2}{7} m_E gsen\beta = 0{,}286 m_E gsen\beta < \mu\, m_E g \cos\beta$$

Para el cilindro:

$$m_C gsen\beta - F_{R(cilindro)} = m_C a_C \; ; R_C F_{R(cilindro)} = I_C \alpha_C \; ; I_C = \frac{1}{2} m_C R_C^2$$

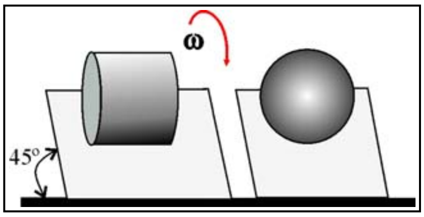
$$R_C F_{R(cilindro)} = \frac{1}{2} m_C R_C^2 \alpha_C \; ; F_{R(cilindro)} = \frac{1}{2} m_C R_C \alpha_C = \frac{1}{2} m_C a_C$$

$$a_C = \frac{2F_{R(cilindro)}}{m_C} \; ; \qquad m_C gsen\beta = F_{R(cilindro)} + m_C \frac{2F_{R(cilidro)}}{m_C} = 3F_{R(cilindro)}$$

$$F_{R(cilidro)} = \frac{1}{3} m_C gsen\beta = 0{,}333 m_C gsen\beta < \mu\, m_C g \cos\beta$$

Como en el enunciado de la prueba $m_E = m_C$ la $F_{R(cilindro)} > F_{R(esfera)}$

Las solución correcta es d.



4.2.17. Situamos una esfera sobre un plano inclinado 45º en condiciones tales que ruede sin deslizar, y luego repites el hecho con un cilindro del mismo material y radio. Para conseguir la misma circunstancia, necesitarás disminuir el ángulo en aproximadamente:

a) 4º b) 10º c) 15º d) 20º

SOL:

Si aplicamos el razonamiento de la cuestión anterior, para el caso de desconocimiento del coeficiente de rozamiento mínimo, para que no deslice con dicho ángulo de 45º :

Para la esfera $\frac{2}{7} m_E gsen\beta = 0{,}286 m_E gsen\beta < \mu\, m_E g \cos\beta$; $\tan\beta < \frac{7\mu}{2}$;

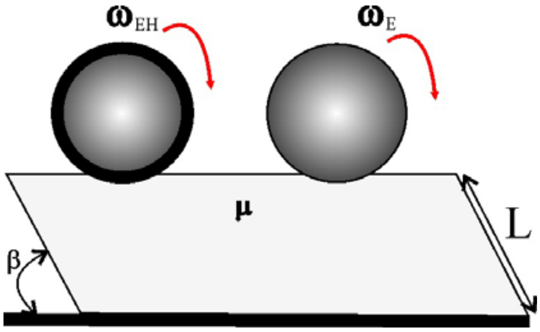
$1 < \frac{7\mu}{2}$; $\mu > \frac{2}{7} = 0{,}29$

Consideramos este coeficiente de rozamiento como valor límite, y lo aplicamos al cilindro, conservando los valores obtenidos al caso de un cilindro, y dado que $I_C = mR^2/2$:

Tal como en la cuestión anterior

$$\frac{1}{3} m_C gsen\beta = 0{,}333 m_C gsen\beta < \mu\, m_C g \cos\beta$$

$\tan\beta < 3\mu = 3(0{,}29) = 0{,}87$. El límite está dado por este valor de la tangente, de lo que; $\beta = 41°$. Por lo tanto tendrás que disminuir en casi cinco grados la pendiente del plano inclinado, siendo sólo correcta la propuesta **a.**



4.2.18. Si sitúas una esfera hueca EH(corteza esférica) y otra maciza E, del mismo material y radio, sobre lo alto de un plano inclinado de longitud L, si ambas ruedan por él sin deslizar siendo el coeficiente de rozamiento μ= 0,2, dirás que:

a) LA FUERZA DE ROZAMIENTO SOBRE LA HUECA ES MAYOR QUE LA MACIZA PARA UN MISMO ANGULO DEL PLANO INCLINADO
b) EL ÁNGULO MÍNIMO DEL PLANO INCLINADO EN LA MACIZA ES EL DOBLE QUE EN LA HUECA
c) LA VELOCIDAD CON QUE LLEGA A LA BASE LA HUECA ES DOBLE QUE LA DE LA MACIZA
d) CUANDO LA MÁS RÁPIDA LLEGA A LA BASE, LA MAS LENTA SÓLO RECORRIÓ EL 84% DEL CAMINO

SOL:
Los momentos de inercia respectivos de la esfera maciza y hueca son $I_E=2mR^2/5$ y $I_{EH}=2mR^2/3$. Aplicando éstos a la fórmulas de los test anteriores.

Para la esfera maciza:

$$m_E gsen\beta - F_{R(esfera)} = m_E a_E \; ; \qquad R_E F_{R(esfera)} = I_E \alpha_E \; ; \qquad I_E = \frac{2}{5} m_E R_E^2 \; ; \quad R_E F_{R(esfera)} = \frac{2}{5} m_E R_E^2 \alpha_E$$

$$F_{R(esfera)} = \frac{2}{5} m_E R_E \alpha_E = \frac{2}{5} m_E a_E \; ; \; a_E = \frac{5F_{R(esfera)}}{2m_E} \; ; \qquad m_E gsen\beta = F_{R(esfera)} + m_E \frac{5F_{R(esfera)}}{2m_E} = \frac{7}{2} F_{R(esfera)}$$

$$F_{R(esfera)} = \frac{2}{7} m_E gsen\beta = 0{,}286 m_E gsen\beta < \mu\, m_E g \cos\beta \qquad \tan\beta < \frac{7\mu}{2} = 0{,}7 \qquad \beta = 35°$$

Para la esfera hueca

$$m_{EH} gsen\beta - F_{R(esferaH)} = m_{EH} a_{EH} \; ; \; R_{EH} F_{R(esferaH)} = I_{EH} \alpha_{EH} \; ; I_{EH} = \frac{2}{3} m_{EH} R_{EH}^2 \; ; \qquad R_{EH} F_{R(esferaH)} = \frac{2}{3} m_{EH} R_{EH}^2 \alpha_{EH}$$

$$F_{R(esferaH)} = \frac{2}{3} m_{EH} R_{EH} \alpha_{EH} = \frac{2}{3} m_{EH} a_{EH} \; ; \; a_{EH} = \frac{3F_{R(esferaH)}}{2m_{EH}} \; ; m_{EH} gsen\beta = F_{R(esferaH)} + m_{EH} \frac{3F_{R(esferaH)}}{2m_{EH}} = \frac{5}{2} F_{R(esferaH)}$$

$$F_{R(esferaH)} = \frac{2}{5} m_{EH} gsen\beta = 0{,}4 m_{EH} gsen\beta < \mu\, m_{EH} g \cos\beta \qquad \tan\beta < \frac{5\mu}{2} = 0{,}5 \qquad \beta = 26{,}6°$$

Como puede observarse el ángulo mínimo para la rodadura no es el doble en la esfera maciza que en la hueca. Si se trata de una corteza esférica (espesor muy pequeño) del mismo radio que el de la esfera maciza, es de suponer que la masa de esta sea muy superior que el de la hueca

Así: $0{,}4 m_{EH} gsen\beta < 0{,}286 m_E gsen\beta$

Por lo tanto a y b son erróneas.

Considerando las aceleraciones, según los valores dados: $a_E = \frac{5F_{R(esfera)}}{2m_E} = \frac{5}{7} gsen\beta$ y $a_{EH} = \frac{3F_{R(esferaH)}}{2m_{EH}} = \frac{3}{5} gsen\beta$

El movimiento del c.d.m, a lo largo del plano inclinado, con ángulo ß, es un M.U.A,y las ecuaciones del movimiento respectivas serán:

Para la esfera maciza: $L = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{7} gsen\beta\right) t_E^2 \; ; \quad v_E = \frac{5}{7} gsen\beta . t_E \; ; \quad v_E = \sqrt{\frac{10}{7} Lgsen\beta}$

Para la esfera hueca: $L = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} gsen\beta\right) t_{EH}^2 \; ; \; v_{EH} = \frac{3}{5} gsen\beta . t_{EH} \; ; \; v_{EH} = \sqrt{\frac{6}{5} Lgsen\beta}$

Dividiendo ambas: $\frac{v_E}{v_{EH}} = 1{,}09$. Por lo tanto $v_E=1{,}09v_{EH}$., por lo tanto la propuesta c es errónea.

Sustituyendo las velocidades respectivas se calcula el tiempo de recorrido:

$\sqrt{\frac{10}{7} Lgsen\beta} = \frac{5}{7} gsen\beta . t_E$, con el tiempo que tarda la más rápida en recorrer la longitud L del plano, se lleva a la esfera hueca para calcular la L_{EH} recorrida.

$L_{EH} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}gsen\beta\right)t_E^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)gsen\beta.\frac{14L_E}{5gsen\beta} = \frac{42}{50}L_E = 0{,}84L_E$, como se propone en d