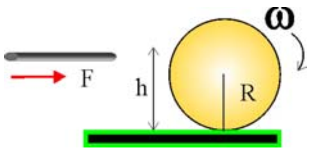
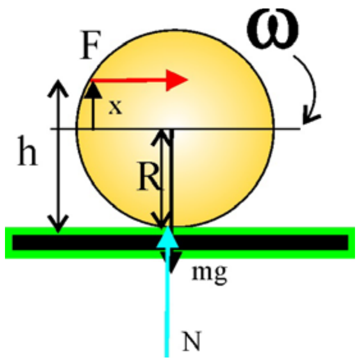
4.2.FUERZAS Y MOMENTOS EN DINÁMICA DE ROTACIÓN (continuación)



4.2.19. Para que una bola de billar de radio R, ruede sin deslizar por la mesa, con la que el rozamiento es despreciable, deberá golpearse a una altura:

a) 4R/3 b) 7R/5 c) R d) 3R/4

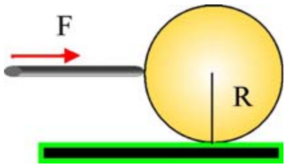
SOL:



En el esquema de la figura, imaginamos que se golpea la bola en un punto a una altura h. Si se pretende que ruede sin deslizar el momento de la fuerza aplicada en el punto donde actúa deberá ser: $M = I\alpha$ tomando el momento respecto al centro de masas del cuerpo

$x \cdot F = I\alpha$, pero como la bola rueda sin deslizar $a_{CM} = \alpha R$. Por otra parte como la única fuerza no equilibrada actuantes es F, aplicando la 2ª Ley de Newton: $F = ma_{CM} = m\alpha R$. Sustituyendo este valor en la expresión del momento y dado que I=2mR²/5, $mR\alpha \cdot x = \frac{2mR^2}{5}\alpha$. Simplificando $x = \frac{2}{5}R$, por lo tanto

$$h = \frac{2}{5}R + R = \frac{7}{5}R$$ Tal como se sugiere en b.



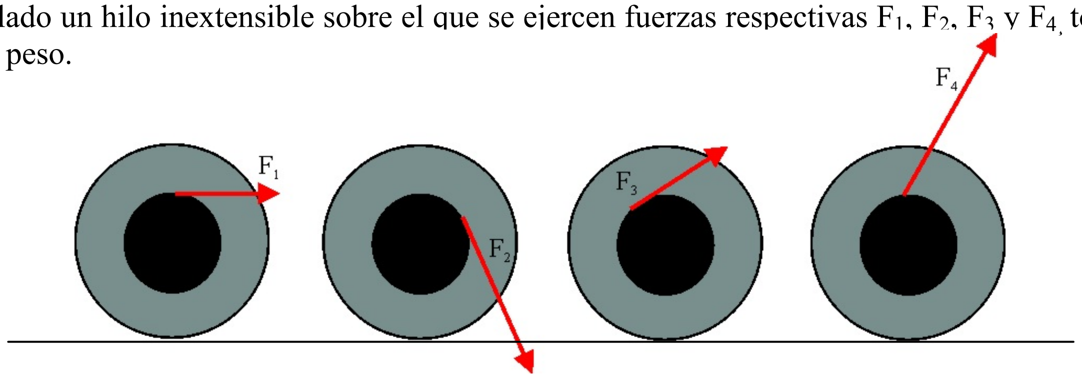
4.2.20. Si se golpea la bola de billar justamente a una altura igual al radio R, y si el rozamiento con la mesa es casi despreciable, ésta va a:

a) DESPLAZARSE GIRANDO EN SENTIDO HORARIO
b) DESPLAZARSE GIRANDO EN SENTIDO ANTIHORARIO
c) DESPLAZARSE SIN GIRAR
d) QUEDARSE INMÓVIL
e) TRASLADAR SU CENTRO DE MASAS Y GIRAR

SOL:

Aplicando el planteo anterior; en este caso h=R, x=0, M=0, $\alpha = 0$; $F = ma_{CM}$. Nótese que todas las fuerzas pasan por el c.d.m. y su momento respecto de él es nulo. La bola se desplazaría deslizando sin girar, tal como se asegura en c.

4.2.21. En el esquema de la figura, 4 poleas iguales formadas por dos cilindros coaxiales de radio R y 2R, llevan enrollado un hilo inextensible sobre el que se ejercen fuerzas respectivas F_1, F_2, F_3 y F_4, todas ellas inferiores al peso.

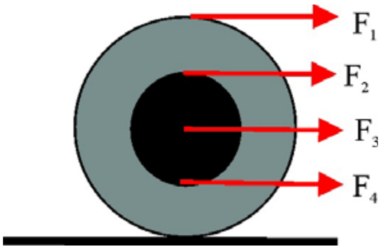


Si la aceleración del centro de masas es igual en las 4, y no existen otras fuerzas no equilibradas, dirás que:

a) Las componentes de las cuatro fuerzas según el eje X, son iguales. b) Las componentes de las cuatro fuerzas según el eje X, siguen el orden $F_4>F_2>F_3>F_1$ c) Las componentes de las cuatro fuerzas según el eje X, son de mayor a menor según el orden $F_1>F_3>F_2>F_4$. d) Las componentes de las cuatro fuerzas según el eje X, son de mayor a menor según el orden $F_4>F_3>F_2>F_1$

SOL:

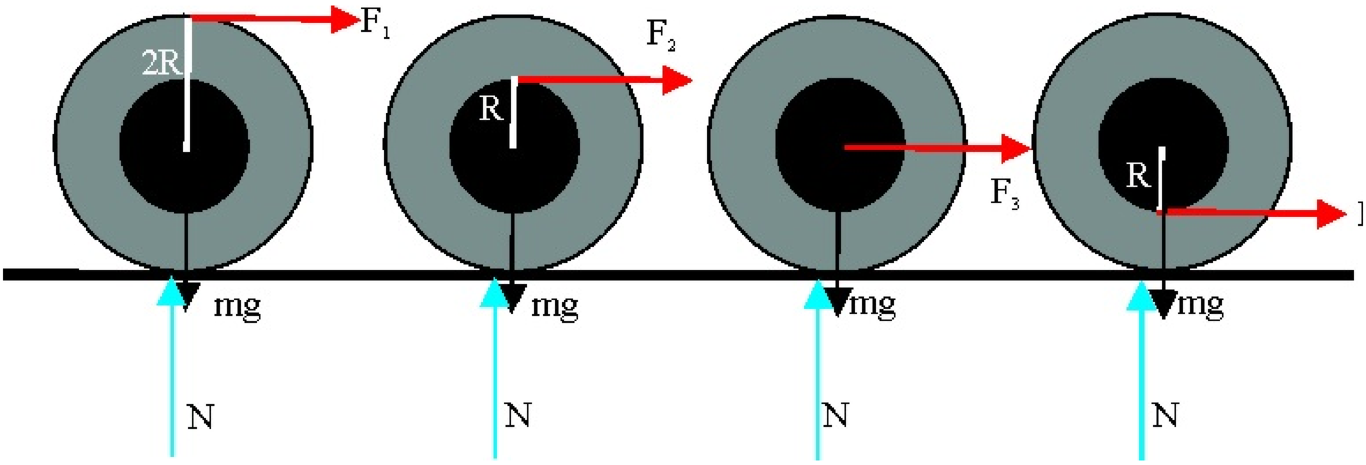
La única fuerza no equilibrada actuante es F, y el único movimiento posible del c.d.m. es una traslación a lo largo del eje X, en consecuencia, la aceleración del c.d.m. vendrá determinado por la componente de F, según el eje X. Aplicando la 2ª Ley de Newton: $F_x = ma_{CM} = m\alpha R$, puesto que el sistema rueda sin deslizar, si la aceleración del c.d.m. es igual en las cuatro, también debe ser igual la componente x de la fuerza. La única respuesta correcta es la a).



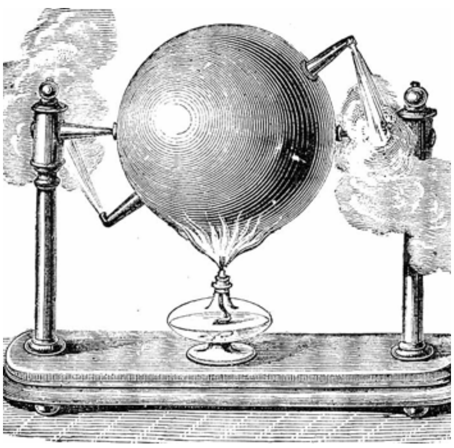
4.2.22. Sobre una misma polea formada por dos cilindros coaxiales de radio R y 2R, respectivamente, que puede desplazarse sobre un suelo horizontal sin rozamiento, pueden actuar las cuatro fuerzas, con el mismo módulo, del esquema dado. Del efecto producido por las mismas dirás que:

a) SI ACTÚA F_4 SE PRODUCIRÁ UN GIRO HORARIO
b) SI ACTÚA F_3, NO GIRA SÓLO SE TRASLADA
c) SI ACTÚA F_2 SE PRODUCIRÁ UN GIRO HORARIO CON UNA ACELERACIÓN EL DOBLE QUE SI ACTUARA F_1.
d) SI ACTÚA F_1 SE PRODUCIRÁ UN GIRO ANTIHORARIO CON UNA ACELERACIÓN EL DOBLE QUE SI ACTUARA F_2

SOL:



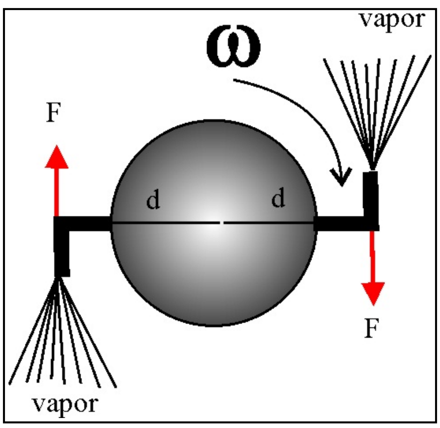
F_1 producirá un momento, 2R F_1, que lo hará girar en sentido horario, y con una aceleración angular el doble que F_2. En cambio F_4, producirá un momento que provocará un giro antihorario, mientras que F_3 sólo provocará un movimiento de traslación al estar aplicado en el centro de masas del sistema. Solo es correcta la b.



4.2.23*. La primera máquina térmica, esto es dispositivo que por acción del calor, producía movimiento fue la eolipila de Herón de Alejandría (siglo I dC.), también mal llamada fuente de Eolo. En el esquema que te dan, el vapor de agua producido al salir por los tubos curvados, producía el giro de la esfera. El estudio dinámico de este hecho, te permitirá decir que:

a) EL GIRO SE DEBE AL PAR DE FUERZAS PRODUCIDO POR EL ESCAPE DEL VAPOR
b) CUANDO SE ACABE EL VAPOR LA ESFERA REALIZARÁ UN MOVIMIENTO RETARDADO HASTA PARARSE.
c) EL MOVIMIENTO DE LA ESFERA ES UNA DEMOSTRACIÓN DE LA TERCERA LEY DE NEWTON
d) LA ACELERACIÓN ANGULAR DE LA ESFERA DEPENDE DE SU MOMENTO DE INERCIA

SOL:



Al salir expulsado el vapor se produce una fuerza de reacción en cada una de las toberas, que origina un par de fuerzas cuyo momento hace girar al sistema, ver segunda figura. El momento de este par $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = I\vec{\alpha}$ produciendo una aceleración angular. El sentido del movimiento de la esfera es conforme con la ley de acción y reacción. La aceleración angular depende del m.d.i. pues $I = \frac{2}{5}mR^2$.

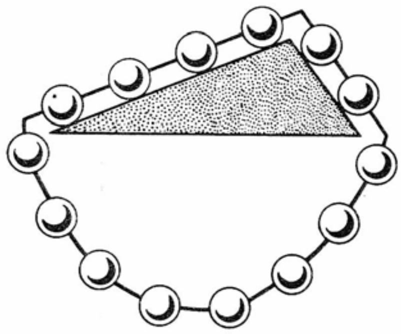
Al acabarse el vapor los rozamientos en los apoyos y con el aire acabarán parando a la esfera. Todas las propuestas son correctas.

4.2.24*. Habrás visto muchas veces los sistemas de riegos rotatorios que se encuentran en los campos y jardines. No creas que este movimiento de rotación se debe a un motor interno del aparato, sino que dependerá de:

a) LA PRESIÓN CON QUE SALGA EL AGUA
b) EL RADIO DEL SISTEMA ROTATORIO
c) LA SECCIÓN DE SALIDA DEL TUBO DISPERSOR
d) LA CANTIDAD DE AGUA QUE SALGA EN LA UNIDAD DE TIEMPO

SOL:

La presión del agua condiciona la fuerza de reacción sobre el aspersor a la salida de los chorros y por lo tanto el momento de estas fuerzas y en consecuencia la aceleración angular y la velocidad angular de rotación. El radio determina el momento a igualdad de fuerza, pues $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ La sección de salida si se estrecha aumenta la velocidad de salida del agua y también incrementa la velocidad de rotación. Así mismo, si aumenta el volumen de agua que sale en la unidad de tiempo, también se incrementa la velocidad de rotación del aspersor. Todas las propuestas son correctas.

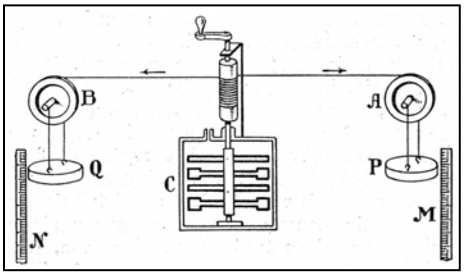


4.2.25. Las ecuaciones que determinan las fuerzas y movimiento de rotación en un sólido fueron deducidas por primera vez en 1760, por el gran matemático suizo Euler, sin embargo algunos siglos antes, el hombre había recurrido al movimiento de las ruedas para inventar móviles perpetuos. En el dibujo se presenta una rueda seudoautomotora, inventada en la edad media formada por pequeñas esferas iguales unidas por segmentos idénticos que llegan a desplazarse hasta un tope sobre un prisma de sección triangular. Si analizas el movimiento de dicha rueda podrás asegurar que:

a) EL MOVIMIENTO DE LA CADENA DE ESFERAS SE DEBE A LA DIFERENCIA DE PESOS DE ESTAS A AMBOS LADOS DE LA SECCIÓN TRIANGULAR
b) LA CADENA DE ESFERAS GIRARÁ PERMANENTEMENTE EN SENTIDO HORARIO
c) LOS MOMENTOS DE LOS PESOS DE LAS ESFERAS SON IGUALES
d) LA CADENA DE ESFERAS DEBE MOVERSE EN SENTIDO ANTIHORARIO

SOL:

Este montaje permitió a Stevin a finales del XVI, descubrir el equilibrio de fuerzas en el plano inclinado. En la sección del prisma triangular existen en el lado mas corto dos esferas que provocan una fuerza de deslizamiento en un sentido, y en el más largo cuatro esferas que lo provocan en sentido contrario, si las fuerzas son diferentes, los momentos provocarán un giro en el sentido de la fuerza mayor. Las esferas al moverse serían reemplazadas por otras esferas y tendríamos un móvil perpetuo en ausencia de rozamiento. Sin embargo Stevin experimentó que el sistema no se movía, por lo que las fuerzas de deslizamiento deberían ser iguales y contrarias y por lo tanto debería existir una proporcionalidad entre los pesos de las bolas y las longitudes de los planos que las soportaban. La única respuesta correcta es la c.



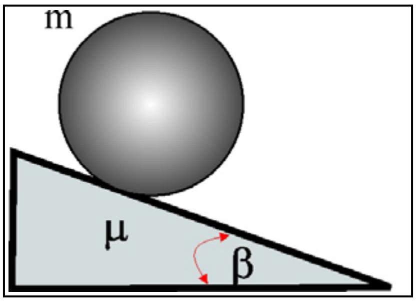
4.2.26*. En 1844, Joule, determinó el equivalente mecánico de la caloría, a partir de un experimento, cuyo esquema se adjunta. Al descender los pesos P y Q, hacían rotar un carrete que al girar movía unas paletas, que por rozamiento calentaban el agua contenida en el recipiente C, aislado del exterior. Del análisis del montaje y teniendo en cuenta las constantes que suponen las diferentes magnitudes del aparato (Masas y longitudes), podrás concluir que la velocidad ω ,con que girarán las paletas va a depender de:

a) DE LAS MASAS DE P y Q
b) LA ALTURA DESCENDIDA POR P y Q
c) EL MOMENTO DE INERCIA DEL SISTEMA ROTATORIO.
d) DEL VALOR DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD DEL LUGAR DONDE SE EFECTÚE EL EXPERIMENTO.

SOL:
Considerando el principio de conservación de la energía, al descender los pesos y hacer girar las paletas, se produce una transformación de energía potencial gravitatoria en energía cinética de rotación de las paletas y de traslación de la pesas.

$$mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

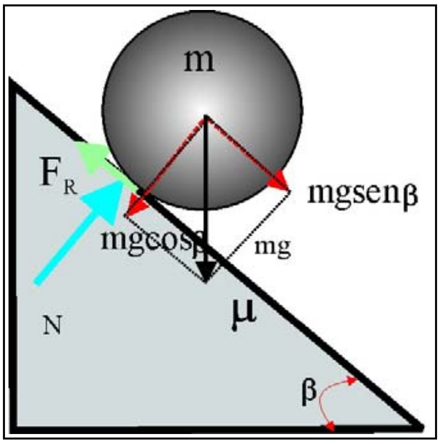
De la ecuación se deduce que ω depende de la altura que bajan las pesas, de su masa, del m.d.i. del sistema y de g. Las soluciones a , b , c y d son correctas.



4.2.27.Si el coeficiente de rozamiento entre una esfera homogénea de 10 kg y 0,1m de radio, situada en lo alto de un plano inclinado 30º es de 0,1 la relación entre la aceleración angular y la aceleración del centro de masas de la esfera es en rad/m, igual

a) AL RADIO   b) AL RADIO^{-1}
c) 5,2   d) 0,08

SOL:
Primeramente hay que determinar el movimiento de la esfera, rodadura o rotación con deslizamiento. En el esquema de fuerzas dado se tendrá si hay rodadura, que la fuerza de rozamiento será: $F_R \le \mu N \le \mu mg\cos\beta$



Tomando g =10 ms^{-2}; $F_R \le 0{,}1.\ 10.10.0{,}86 \le 8{,}6$ N. Sin embargo la fuerza de rozamiento que hace girar la esfera y que produce el momento $R\cdot F_R = \frac{2mR^2}{5}\alpha$,

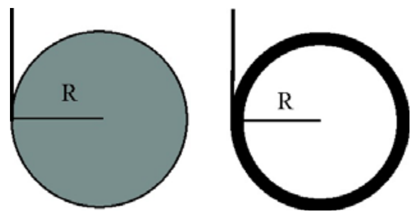
siendo $I_E = \frac{2mR^2}{5}$, sustituyendo los valores, $F_R = \frac{2mR}{5}\alpha = 0{,}4\alpha$, si reemplazamos F_R por su valor máximo tendremos que la aceleración angular.

$$\alpha = \frac{8{,}6}{0{,}4} = 21{,}5\frac{rad}{s^2}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{m\vec{g}\,sen\beta - \vec{F}_R}{m}; \qquad a_{CM} = 5 - \frac{F_R}{10} = 4{,}14\,ms^{-2}.$$

Cuando hay rodadura $a_{CM} = \alpha\cdot R$; veamos si se cumple o no; $\alpha\cdot R = 21{,}5\cdot 0{,}1 = 2{,}15 \ne 4{,}14$

Por lo tanto no se cumple, y el movimiento no es una rodadura, sino que existe rotación y deslizamiento, y la relación entre las aceleraciones angulares y del centro de masas será. $\frac{\alpha}{a_{CM}} = \frac{21{,}5\frac{rad}{s^2}}{4{,}14\frac{m}{s^2}} = 5{,}2\frac{rad}{m}$, por lo que la única respuesta válida es la c.

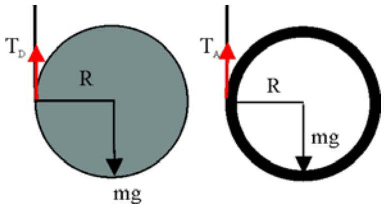


4.2.28. Si un aro y un disco de la misma masa y radio, enrollados por un hilo de la misma longitud L, se dejan caer desenrollándose, dirás que:

a) EL ARO EJERCE MAYOR TENSIÓN SOBRE EL HILO QUE EL DISCO
b) LA ACELERACIÓN CON QUE DESCIENDE EL ARO ES MAYOR QUE LA DEL DISCO
c) LAS ACELERACIONES ANGULARES DE AMBOS SON IGUALES
d) AL ACABARSE EL HILO, EL ARO SE SUELTA DE ÉSTE ANTES QUE EL DISCO.

Momentos de inercia del disco y aro respectivamente: $mR^2/2$ y mR^2

SOL: El aro y el disco ruedan por la cuerda $a_{CM} = \alpha \cdot R$



$$mg - T_D = ma_{CMDisco}\,;\ R.T_D = I_D\alpha_D\ ;\ RT_D = \frac{mR^2}{2}\alpha_D\,;\ T_D = \frac{mR}{2}\alpha_D = \frac{ma_{CMdisco}}{2}$$

$$mg - \frac{ma_{CMdisco}}{2} = ma_{CMDisco}\,;\quad a_{CMdisco} = \frac{2}{3}g\,;$$

$$T_D = mg - m\frac{2}{3}g = \frac{1}{3}mg = 0{,}33mg$$

$$mg - T_A = ma_{CMAro}\,;\ RT_A = I_A\alpha_A\,;\ \ R.T_A = mR^2\alpha_D\,;\ T_A = mR\alpha_D = ma_{CMAro}$$

$$mg - ma_{CMAro} = ma_{CMAro}\,;\qquad a_{CMAro} = \frac{1}{2}g\,;\qquad T_A = \frac{1}{2}mg = 0{,}5mg$$

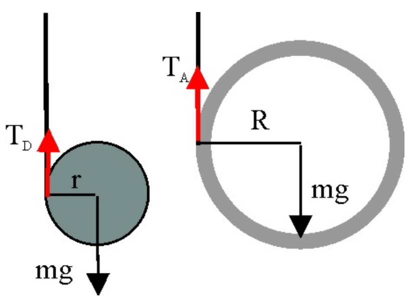
Comparando las tensiones se deduce que $T_A > T_D$ como se propone en <u>a</u>. Sin embargo, la aceleración con que desciende el disco es mayor que la del aro en contra lo que se propone en <u>b</u>, y en <u>c</u>. Al desenrrollarse más rápidamente el disco que el aro, se soltará antes, en contra de lo propuesto en <u>d</u>

4.2.29. Enrollas una fina cuerda sobre un disco y un aro de la misma masa, con radios respectivos r y R, y los cuelgas desde la misma altura desenrollándose a partir del mismo instante. Cuando el más rápido llega al suelo, el más lento habrá recorrido sólo:

a) LA MITAD DEL CAMINO
b) LAS TRES CUARTAS PARTES DEL CAMINO
c) LA CUARTA PARTE DEL CAMINO
d) LLEGAN AL MISMO TIEMPO

SOL:

En el esquema de las fuerzas que actúan, y considerando los momentos de inercia del disco como $mr^2/2$ y del aro mR^2:



$$mg - T_D = ma_{CMDisco}\quad ;\ r.T_D = I_D\alpha_D\ ;\ r.T_D = \frac{mr^2}{2}\alpha_D\,;T_D = \frac{mr}{2}\alpha_D = \frac{ma_{CMdisco}}{2}$$

$$mg - \frac{ma_{CMdisco}}{2} = ma_{CMDisco}\,;\quad a_{CMdisco} = \frac{2}{3}g$$

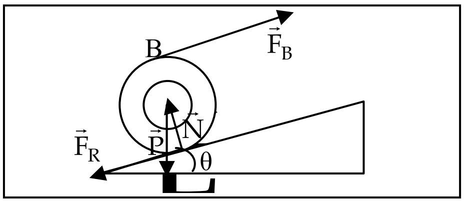
$$mg - T_A = ma_{CMAro}\,;\ R.T_A = I_A\alpha_A\,;\ \ R.T_A = mR^2\alpha_D\,;\ T_A = mR\alpha_D = ma_{CMAro}$$

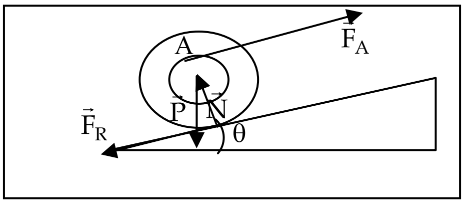
$$mg - ma_{CMAro} = ma_{CMAro}\,;\qquad a_{CMAro} = \frac{1}{2}g$$

Si la altura a recorrer por el centro de masas del más rápido hasta que llega al suelo es H, como el movimiento realizado en cada caso es un M.U.A. Para el disco: $H = \frac{1}{2}a_{CM,D}t^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}gt^2\,;\quad t = \sqrt{\frac{3H}{g}}$

Para el aro; $h = \frac{1}{2}a_{CM,A}t^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{3H}{g}}\right)^2 = \frac{3}{4}H < H$

El más rápido es el disco que corresponde a la respuesta <u>b</u>, las otras respuestas son incorrectas.





4.2.30*. Si una polea compuesta de masa M, formada por dos cilindros coaxiales de radios R y R/2 respectivamente, asciende rodando sin deslizar, por un plano inclinado, mediante la fuerza que se puede aplicar a través de una cuerda según se enrolle ésta, en los puntos A y B. En estas situaciones y si las aceleraciones de los centros de masas son los mismos, puedes comprobar que:

a) LA FUERZA DE ROZAMIENTO SE OPONE SIEMPRE AL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS
b) LA FUERZA DE ROZAMIENTO PRODUCE UN MOMENTO QUE SE OPONE SIEMPRE AL DE LA FUERZA DE TRACCIÓN
c) F_A SERÁ MAYOR QUE F_B
d) LA ACELERACIÓN ANGULAR ES LA MISMA EN AMBOS CASOS

SOL.

Apliquemos la Dinámica cuando la fuerza está aplicada en el punto B, situado a una distancia R del c.d.m. de la polea. Designemos con a_B la aceleración del c.d.m. cuando actúa F_B

$$\sum F = m\cdot a_B \;;\quad F_B - P\,sen\,\theta - F_R = m\cdot a_B\;;\qquad \sum M\left(respecto\,del\,c.d.m,\right) = I\cdot\alpha_B \quad;\quad F_B R + F_R R = I\,\alpha_B$$

Las fuerzas P y N no dan momentos por pasar por el c.d.m. Además, por rodar la polea $a_B = \alpha_B \cdot R$

Resolviendo las ecuaciones resulta para $a_B = \dfrac{2F_B - P\,sen\,\theta}{\dfrac{I}{R^2}+m}$

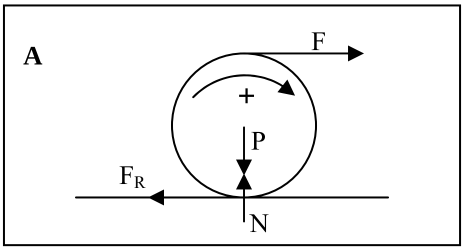
Apliquemos la Dinámica cuando la fuerza está aplicada en el punto A, situado a $r = \dfrac{R}{2}$ del c.d.m.

$$F_A - P\,sen\,\theta - F_R = m\cdot a_A;\qquad F_A r + F_R R = I\,\alpha_A;\qquad a_A = \alpha_A\cdot R\,;\qquad a_A = \frac{F_A\left(1+\dfrac{r}{R}\right) - P\,sen\,\theta}{\dfrac{I}{R^2}+m}$$

Como $r = \dfrac{R}{2}$ sustituyendo en la anterior $a_A = \dfrac{\dfrac{3F_A}{2} - P\,sen\,\theta}{\dfrac{I}{R^2}+m}$

Del enunciado $a_a = a_B$ así que igualando $\dfrac{2F_B - P\,sen\,\theta}{\dfrac{I}{R^2}+m} = \dfrac{\dfrac{3F_A}{2} - P\,sen\,\theta}{\dfrac{I}{R^2}+m}$ de donde $F_A = \dfrac{4}{3}F_B$

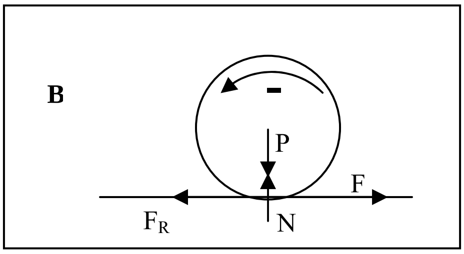
En la rodadura no siempre la F_R tiene sentido contrario a la aceleración del c.d.m, aunque en este caso sí, de modo que la respuesta a no es correcta. La respuesta b también es incorrecta, pues como se ve en este caso, los momentos son del mismo sentido. La respuesta c es correcta pues F_A es mayor que F_B. En cuanto a la respuesta d al ser la aceleración del c.d.m. la misma en ambos casos, $\alpha_B\cdot R = \alpha_A\cdot R$ de donde deducimos que las aceleraciones angulares son iguales en ambos casos.



4.2.31. Si en un carrete de masa m, enrollas un hilo, y tiras de él con una fuerza F, como aparece en las figuras A y B; de forma que se desplace girando y deslizando, sobre la horizontal, deberá cumplirse que:

a) LOS MOMENTOS RESULTANTES SON LOS MISMOS EN A Y B.
b) LA ACELERACIÓN DEL C.D.M. ES MAYOR EN A QUE EN B.
c) LA ACELERACIÓN ANGULAR ES DISTINTA EN A QUE EN B.
d) EN CADA INSTANTE LAS VELOCIDADES ANGULARES SON IGUALES.

Coeficiente de rozamiento μ.



SOL.

Caso A) $F - F_R = ma_A$;

Los momentos hacen girar al carrete en el mismo sentido $F \cdot R + F_R \cdot R = I \cdot \alpha_A$

Por deslizar $F_R = \mu N = \mu P = \mu mg$

$$\text{Operando} \begin{cases} a_A = \dfrac{F}{m} - \mu g \\ \alpha_A = \left(\dfrac{F}{I} + \dfrac{\mu mg}{I}\right) R = Cte \end{cases} \qquad \omega_A = \alpha_A \cdot t = \left(\dfrac{F}{I} + \dfrac{\mu mg}{I}\right) Rt$$

Caso B) $F - F_R = ma_B$

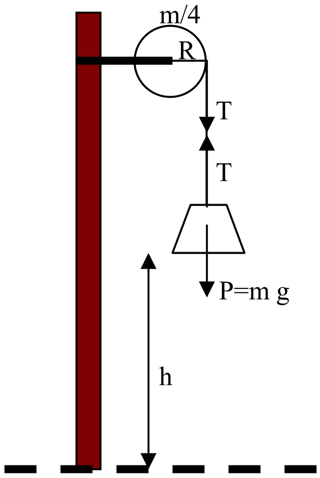
Los momentos hacen girar al carrete en sentidos opuestos, uno se toma positivo y el otro negativo: $F \cdot R - F_R \cdot R = I \cdot \alpha_B$

Por deslizar $F_R = \mu N = \mu P = \mu mg$

$$\text{Operando} \begin{cases} a_B = \dfrac{F}{m} - \mu g \\ \alpha_B = \left(\dfrac{F}{I} - \dfrac{\mu mg}{I}\right) R = Cte \end{cases} \qquad \omega_B = \alpha_B \cdot t = \left(\dfrac{F}{I} - \dfrac{\mu mg}{I}\right) Rt = \dfrac{F - \mu mg}{I} Rt$$

Como hay deslizamiento la fuerza F tiene que ser mayor que F_R para que pueda haber movimiento, de modo que en el caso B, el carrete gira en sentido contrario al del caso A, siendo α_B positiva, mientras que α_A es negativa.

En consecuencia, observando las ecuaciones de los momentos se ve que son distintos en A y en B, luego la respuesta <u>a</u> no es correcta. Las aceleraciones del c.d.m. son las mismas en A y en B, luego la respuesta <u>b</u>, no es correcta. En cambio la respuesta <u>c</u> es correcta porque las aceleraciones angulares no solo son distintas en módulo, sino que también tienen sentidos contrarios. Finalmente, las velocidades angulares son en cada instante distintas y de sentidos opuestos, por lo que la respuesta <u>d</u> no es correcta.



4.2.32*. En el esquema de la figura cuelga un peso de masa m, de una polea de masa m/4 y de radio R, que lleva enrollada una cuerda. El m.d.i de la polea es $mR^2/2$. Se cumple que:

a) LA TENSIÓN DE LA CUERDA VALE mg/4.
b) LA ACELERACIÓN CON QUE DESCIENDE LA CUERDA ES 8g/9
c) LA ACELERACIÓN ANGULAR DE LA POLEA ES 9g/8R
d) CUANDO EL PESO HA DESCENDIDO h, LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA POLEA ES $\dfrac{4}{3R}\sqrt{g\,h}$

SOL:

La cuerda no desliza por la polea, luego se cumple entre la aceleración de la cuerda y la angular de la polea que $a = \alpha \cdot R$. De las ecuaciones de la Dinámica resulta.

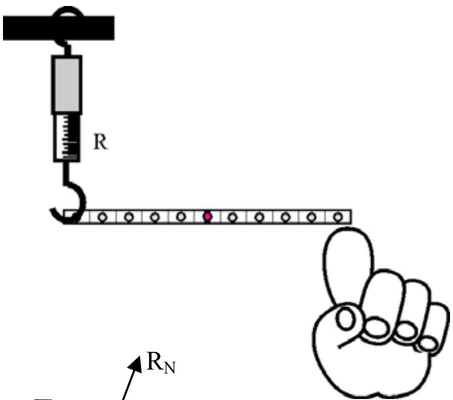
$$\begin{cases} a = \alpha \cdot R \\ P - T = m \cdot a \\ T \cdot R = I \cdot \alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{4} R^2 \, \alpha \end{cases} \Rightarrow \; a = \frac{8}{9} g \, ; \quad \alpha = \frac{8g}{9R} \, ; \qquad T = \frac{mg}{9}$$

Al ser la aceleración constante el movimiento es uniformemente acelerado de modo que la velocidad del peso al descender h es

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8g}{9} h} = \frac{4}{3}\sqrt{g\,h}$$

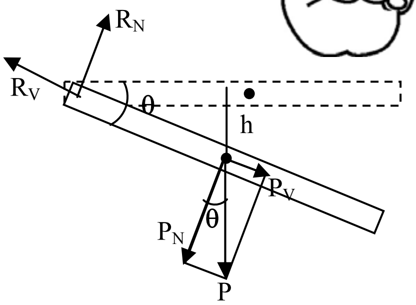
Como no hay deslizamiento en la garganta de la polea entonces $\omega = \dfrac{v}{R} = \dfrac{4}{3R}\sqrt{g\,h}$

Las respuestas a y c no son correctas. La respuesta b es correcta, como así la respuesta d.



4.2.33. Soportas una palanca didáctica desde el orificio de su extremo, con un dinamómetro sensible, sujetándola horizontalmente con un dedo por el otro. La sueltas. La relación entre las reacciones que soporta el pivote (dinamómetro) cuando forma un ángulo de $30°$ con la horizontal, y cuando es de $60°$, es una constante que vale:

a) La unidad b) 1,28 c) cero d) 8,21



SOL:

Al quitar el dedo, la palanca empieza a girar alrededor del punto de apoyo en el dinamómetro y al formar un ángulo cualquiera θ con la horizontal tiene velocidad. Vamos a considerar su c.d.m. situado en el centro de la palanca y se van a descomponer el peso P, y la reacción R en dos componentes, una según la varilla y otra normal a la varilla. Como la varilla gira debe haber una fuerza centrípeta que cambie la dirección de su vector velocidad y otra tangencial que proporcione la aceleración al c.d.m. siendo $a_t = \alpha \cdot R = \alpha \cdot L/2$

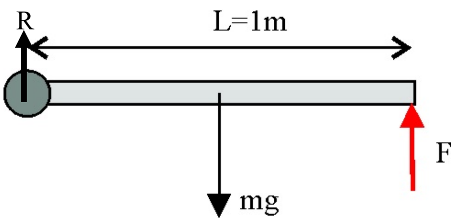
Con las consideraciones anteriores y las ecuaciones de la Dinámica resultan las ecuaciones:

$$\begin{cases} R_V - P_V = F_C \; ; \; R_V - P_V = m\dfrac{v^2}{L/2} = \dfrac{2m}{L} 2g \dfrac{L}{2} \operatorname{sen}\theta \\ R_N - P_N = m \cdot a_t \\ P_N \cdot \dfrac{L}{2} = I \cdot \alpha = \dfrac{1}{3} m L^2 \cdot \alpha \\ a_t = \alpha \cdot \dfrac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_N = \dfrac{7}{4} mg \cos\theta \\ R_v = 3mg \operatorname{sen}\theta \\ R = \sqrt{R^2{}_N + R^2{}_V} = mg\sqrt{9\operatorname{sen}^2\theta + \dfrac{49}{16}\cos^2\theta} \end{cases}$$

La relación entre el módulo de la reacción cuando θ = 60º y θ = 30º vale:

$$\frac{R_{60}}{R_{30}} = \sqrt{\frac{9\operatorname{sen}^2 60 + \dfrac{49}{16}\cos^2 60}{9\operatorname{sen}^2 30 + \dfrac{49}{16}\cos^2 30}} = \sqrt{\frac{7{,}51}{4{,}55}} = 1{,}28$$

La respuesta correcta es la b, todas las otras son incorrectas.



4.2.34*. Una varilla delgada homogénea de 1 metro de longitud y masa 1 kg se encuentra sujeta por un extremo y en posición horizontal, gracias a la fuerza F que haces para sostenerla en el otro extremo. Si la sueltas dirás que:

a) LA FUERZA QUE HABRÁS DEJADO DE HACER SOBRE LA VARILLA ES 4,9 N Y LA REACCIÓN R, DEL APOYO 4,9 N.
b) LA ACELERACIÓN CON QUE INICIA SU MOVIMIENTO ES 14,7 rad/s^2
c) LA VELOCIDAD QUE ADQUIERE SU CENTRO DE MASAS EN EL PUNTO MAS BAJO DE LA TRAYECTORIA ES 2,71 m/s
d) LA REACCIÓN QUE EJERCE EL PIVOTE DE SUJECIÓN EN EL PUNTO MÁS BAJO Y EN ESE INSTANTE ES 24,5 N.

SOL:

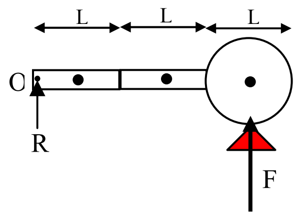
Inicialmente la varilla está en equilibrio $\begin{cases} \sum M = 0;\ mg\frac{L}{2} - FL = 0;\ F = \frac{mg}{2} = 4{,}9\,N \\ \sum F = 0;\quad R + F - mg = 0;\ \ R = 4{,}9\,N \end{cases}$

En el instante inicial al soltar la varilla F=0; $mg\frac{L}{2} = I\cdot\alpha = \frac{1}{3}mL^2\alpha;\ \ \alpha = \frac{3g}{2L} = 14{,}7\frac{rad}{s^2}$

Por el principio de conservación de la energía:

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2;\quad \omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{\frac{mL^2}{3}}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3g}{L}}\frac{L}{2} = 2{,}71\,m/s$$

La fuerza centrípeta es la neta hacia dentro: $R - P = F_c;\ \ R = 1\frac{2{,}71^2}{0{,}5} + 9{,}8 = 24{,}5\,N$



4.2.35. En el esquema de la figura, una barra formada por 3 segmentos, dos rectangulares y uno circular de la misma masa m y tamaño L (diámetro del círculo = L), está apoyada en un soporte y de un pivote del cual puede oscilar. Si se suelta el soporte, dirás que:

a) LA REACCIÓN QUE EJERCÍA EL SOPORTE SOBRE EL SISTEMA ERA DE 1,2 mg
b) LA ACELERACIÓN ANGULAR CON QUE INICIALMENTE SE MUEVE EL SISTEMA AL SOLTARSE DESDE ESA POSICIÓN ES g/L rad/s^2
c) LA VELOCIDAD MÁXIMA QUE ADQUIERE EL EXTREMO DEL SISTEMA ES $\sqrt{3gL}$ m/s
d) EL PERIODO DE LAS OSCILACIONES QUE REALIZA ES $\sqrt{L}$ s

SOL:

Consideremos los tres elementos con el peso P aplicado en el c.d.m. de cada uno. Como inicialmente está en equilibrio se cumple.

$$\sum F = R + F - P - P - P = 0;\qquad \sum M = 0{,}5L\cdot P + 1{,}5L\cdot P + 2{,}5L\cdot P - 2{,}5L\cdot F = 0$$

$$F = 1{,}8P;\ \ R = 1{,}2P = 1{,}2mg$$

Al quitar la cuña desaparece F y el sistema se mueve con aceleración angular. Antes hay que hallar el m.d.i. del sistema respecto del punto O.

$$I = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{12}mL^2 + m(1{,}5L)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m(2{,}5L)^2 = 9{,}04mL^2$$

$$\sum M = 0,5L \cdot P + 1,5L \cdot P + 2,5L \cdot P = I \cdot \alpha = 9,04mL^2 \cdot \alpha; \quad \alpha = \frac{4,5L \cdot mg}{9,04mL^2} \approx \frac{0,5g}{L}$$

Para calcular la velocidad del c.d.m. del sistema cuando alcanza la vertical hemos de aplicar el principio de conservación de la energía mecánica, lo que requiere determinar primero la posición del c.d.m del sistema respecto de O.

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{m_T} = \frac{m \cdot 0,5L + m \cdot 1,5L + m \cdot 2,5L}{3m} = 1,5L$$

$$m_T g \cdot 1,5\,L = \frac{1}{2} I\omega^2; \quad \omega = \sqrt{\frac{9m\ gL}{9,04mL^2}} \approx \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{g}{L}}\ 1,5L = 1,5\sqrt{gL}$$

Como la velocidad angular de todos los puntos del sistema es la misma, en cada instante, podemos establecer la relación que permite calcular la velocidad del extremo de la barra.

$$\omega = \frac{v_{CM}}{x_{CM}} = \frac{v_{extremo}}{x_{extremo}}; \quad v_{extremo} = \frac{v_{CM}}{x_{CM}} x_{extremo} = \frac{1,5\sqrt{gL}}{1,5L} 3L = 3\sqrt{gL}$$

El periodo de un péndulo físico requiere conocer el m.d.i. I, del sistema respecto del punto de suspensión O y la distancia h del c.d.m. al punto O. Resulta que h = x_{CM}

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{9,04mL^2}{m \cdot 9,8 \cdot 1,5\,L}} = \sqrt{0,61\ L}$$

La solución a es correcta, las soluciones b, c y d son incorrectas.