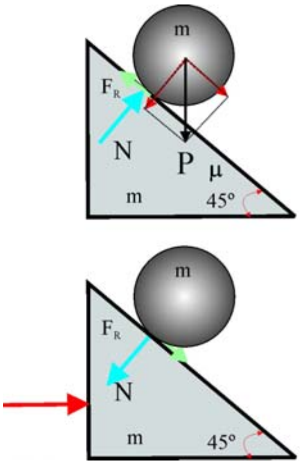
4.2. FUERZAS Y MOMENTOS EN DINÁMICA DE ROTACIÓN (final)



4.2.36. Sobre una cuña en forma de plano inclinado 45° dispones una esfera metálica, cuyo coeficiente de rozamiento con la cuña es 0,4. Si las masas de la cuña y la esfera son iguales, y aquella no roza con el suelo, dirás que la fuerza horizontal necesaria a aplicar sobre la cuña para que la esfera no ruede y la cuña permanezca en reposo, deberá ser de:

a) Peso b) Peso/2 c) 0,3 Peso d) 3 Peso

SOL:

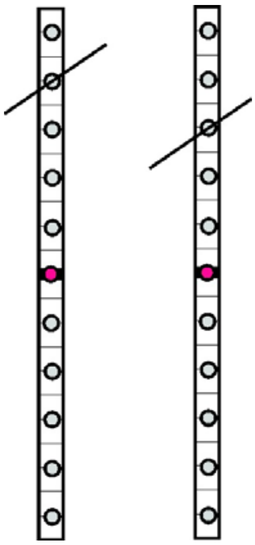
Si la esfera no puede rodar, va a deslizar y entonces $F_R = \mu \cdot N = \mu P \cos 45$

Sobre la esfera actúan las fuerzas de la figura superior, y sobre la cuña aparecen las fuerzas de reacción a N y F_R; actuando en sentidos contrarios. Con F se representa la fuerza horizontal a aplicar, para que la cuña no se mueva permaneciendo en equilibrio.

$\sum F_X = 0$; $F + F_R \cos 45 - N \cos 45 = 0$; $F = P\cos^2 45 - \mu P \cos^2 45$

$$F = P\cos^2 45(1-0{,}4) = 0{,}3P$$

La única solución correcta es la c



4.2.37. Si tomas una barra metálica homogénea (una palanca didáctica) con 11 orificios uniformemente repartidos (desde los extremos al centro), la suspendes por el segundo orificio, y la haces oscilar, luego repites la operación fijándola en el tercer orificio, los períodos de ambas oscilaciones respectivas estarán en una relación aproximada de:

a) 1,01 b) 1,02 c) 1,03 d) 1,04

SOL:

Se trata de un péndulo físico cuyo período $T = 2\pi\sqrt{I/mgh}$), [1] siendo I el momento de inercia de la varilla respecto a su centro de suspensión y h la distancia entre el centro de masas y el de suspensión. Como se aprecia en el esquema, si suponemos la distancia entre orificios x, de forma que L=10x, como $I_0=ML^2/12$. En el primer caso (segundo orificio) h=4x. Para calcular el m.d.i. aplicamos el teorema de Steiner.

$I_2 = [M(10x)^2/12] + M(4x)^2 = Mx^2(100/12 + 16) = 292\ Mx^2/12$.

Sustituyendo en [1]. $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{292Mx^2}{12 \cdot M \cdot g \cdot 4x}} = 2\pi\sqrt{0{,}62x}$

Cuando se suspende por el tercer orificio.

$I_{3º} = [M(10x)^2/12] + M(3x)^2 = Mx^2(100/12 + 9) = 208\ Mx^2/12$.

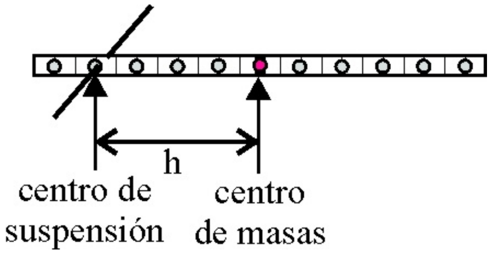
Sustituyendo en [1] $T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{208Mx^2}{12 \cdot M \cdot g \cdot 3x}} = 2\pi\sqrt{0{,}59x}$

La relación entre ambos períodos será por lo tanto $\dfrac{T_2}{T_3} = 1{,}03$ y la respuesta es la c

4.2.38. Una palanca didáctica con 11 orificios simétricamente dispuestos desde sus extremos, mide 30 cm. Se la suspende de un vástago por uno de los orificios y se la hace oscilar. El orificio desde el que debes suspenderla para que el período de oscilación sea el menor posible, numerándolos desde el superior (el 1), hasta el inferior (el 11), será el:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Nota: La distancia entre dos orificios consecutivos es x. La distancia del primer orificio y el último, al extremo de la palanca vale x/2.



SOL:

Cuando la palanca se deja libre comienza a oscilar alrededor del eje de suspensión, como en un péndulo físico. $T = 2\pi\sqrt{I/mgh}$ con $I = \frac{1}{12}ML^2 + Mh^2$. Vamos a derivar T respecto de h, e igualar la derivada a cero, que es la condición de máximo.

$$\frac{dT}{dh} = \frac{d}{dh}\left[2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ML^2 + Mh^2}{Mgh}}\right] = 0\ ;\ \ M^2gh^2 - \frac{1}{12}M^2L^2g = 0;\ \ h = \frac{L}{\sqrt{12}}$$

Como L = 30 cm $\quad h = \frac{30\,\text{cm}}{\sqrt{12}}$

Observando la barra, si la distancia entre agujeros es x, el agujero 1 y el 11 están situados a x/2 de cada extremo. En consecuencia, para saber la distancia entre agujeros hay que dividir la longitud de la barra entre 11.

$$x = \frac{30\,\text{cm}}{11}$$

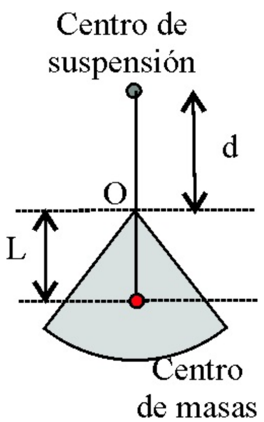
El agujero en el que hay que situar el centro de suspensión deberá ser el que esté más próximo a

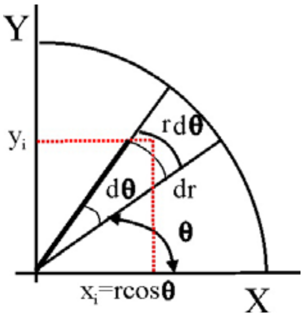
$$n = \frac{30/\sqrt{12}}{30/11} = 3{,}17 \approx 3$$

Contado desde el centro de masas, ya que h se mide desde este punto. En consecuencia deberá ser el tercero contado desde cualquier extremo de la palanca. Únicamente el apartado c es el correcto.

4.2.39. Tomas una cartulina gruesa, recortas un círculo de radio R, lo doblas en 4, recortas un sector, pasas un hilo por su vértice de longitud d = 2R y lo haces oscilar. El periodo de las oscilaciones en segundos será:

a) 1 b) 2R c) $\sqrt{2}$ d) $3{,}27\sqrt{R}$





SOL:

En primer lugar hay que hallar la posición del c.d.m. de la figura, que estará por simetría sobre la línea del hilo. En la figura inferior se ha cambiado de posición y se ha tomado un elemento de área de lados dr y rdθ; siendo la masa de ese elemento si σ es la densidad superficial, $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot dr \cdot rd\theta$. La X_{CM} será:

$$X_{CM} = \frac{\iint x_i\,dm}{M_T} = \frac{\iint r\cos\theta \cdot \sigma\, dr \cdot r\,d\theta}{M_T} = \sigma\frac{\int_0^R r^2 dr \int_0^{90} \cos\theta\, d\theta}{\sigma \pi R^2/4} = \frac{4R}{3\pi}$$

Por simetría la Y_{CM} valdrá igual, sin embargo la distancia L al vértice será.

$$L = \sqrt{X_{CM}^2 + Y_{CM}^2} = \sqrt{\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 + \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2} = \frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}$$

El momento de inercia del elemento respecto de un eje perpendicular que pase por el vértice O, vale $dI_o = r^2\,dm$ (ver segunda figura).

$$I_O = \iint r^2 dm = \iint r^2 \sigma dS = \sigma \iint r^2\, r d\theta\, dr = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \sigma \frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2} = \sigma \frac{\pi R^2}{4}\frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} M_E R^2$$

Aplicando el teorema de Steiner se puede calcular el m.d.i respecto del eje que pasa por el c.d.m.

$$I_O = I_{CM} + M_E L^2 ; \qquad I_{CM} = \frac{1}{2} M_E R^2 - M_E \left[\frac{4R}{3\pi}\sqrt{2}\right]^2 = \frac{1}{2} M_E R^2 - 0{,}36 M_E R^2 = 0{,}14 M_E R^2$$

Aplicando de nuevo el teorema de Steiner hallaremos el momento de inercia respecto del centro de suspensión.

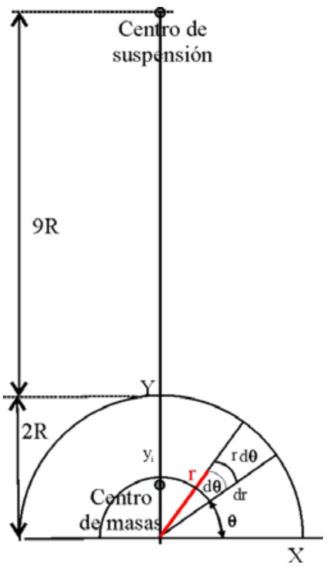
$$I = I_{CM} + M_E (L+d)^2 = 0{,}14 M_E R^2 + M_E \left(\frac{4R\sqrt{2}}{3\pi} + 2R\right)^2 = 6{,}9 M_E R^2$$

El periodo de oscilación $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_E g(L+d)}} = 2\pi \sqrt{\frac{6{,}9 M_E R^2}{M_E 9{,}8 \left(\frac{4R\sqrt{2}}{3\pi} + 2R\right)}} = 3{,}27\sqrt{R}$ (s). La solución correcta es <u>d</u>

4.2.40 Una cartulina se recorta en forma de C, formada por dos semicírculos de radios R y 2R. Con un hilo de longitud 9 R se engancha a la C de forma que quede en equilibrio estable, sujetas el otro extremo con una chincheta y lo haces oscilar. El periodo de las oscilaciones, si es M_T la masa de C, será:

a) $2\pi\sqrt{R}$ (s); b) $\sqrt{2R}$ (s); c) 4 s ; d) 0,2 s

SOL:



La masa de la figura $M_T = \sigma \cdot S = \sigma \cdot \pi \frac{\left((2R)^2 - R^2\right)}{2} = \sigma \frac{3\pi R^2}{2}$

Se ha de determinar en primer lugar la posición del c.d.m de la C. Por simetría la coordenada X_{CM} cae sobre X=0, es decir en el eje Y.

$$Y_{CM} = \frac{\iint x_i\, dm}{M_T} = \frac{\iint r \operatorname{sen}\theta\ \sigma \cdot dr \cdot r\, d\theta}{\sigma \frac{3\pi R^2}{2}} = 2 \frac{\int_R^{2R} r^2 dr \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{3\pi R^2} = \frac{28R}{9\pi} = 0{,}99R$$

Cálculo del m.d.i respecto del punto O

$$I_o = \iint r^2 dm = \iint r^2 \sigma dr \cdot r\, d\theta = \sigma \int_R^{2R} r^3 dr \int_0^{\pi} d\theta = \sigma \frac{15}{4}\pi R^4 = \frac{5}{2}\sigma \frac{3\pi R^2}{2} R^2 = \frac{5}{2} M_T R^2$$

Del teorema de Steiner se puede calcular el m.d.i. respecto del c.d.m.

$$\frac{5}{2} M_T R^2 = I_{CM} + M_T \cdot Y_{cM}^2 \ ; \quad I_{CM} = \frac{5}{2} M_T R^2 - M_T \cdot 0{,}99^2 R^2 = 1{,}52\, M_T R^2$$

La distancia h entre el centro de masas y el de suspensión vale.

$$h = 9R + (2R - 0{,}99R) = 10{,}01R$$

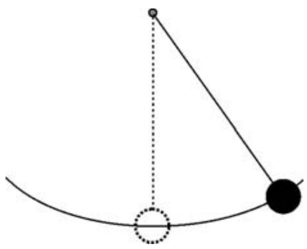
El momento de inercia respecto del centro de suspensión se calcula de nuevo con el teorema de Steiner.

$$I = I_{CM} + M_T h^2 = 1{,}52 M_T R^2 + M_T (10{,}01R)^2 = 101{,}7 M_T R^2$$

El periodo del péndulo físico vale.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_T g h}} = 2\pi \sqrt{\frac{101{,}7\, M_T R^2}{M_T \cdot 9{,}8 \cdot 10{,}01 R}} \approx 2\pi\sqrt{R}\ (s)$$

La única solución correcta es la <u>a</u>



4.2.41. Por lo general, un péndulo simple suele ser una esfera maciza de radio R, colgada de un hilo de longitud L, que sujetas desde su extremo, separas de la posición de equilibrio y dejas oscilar. Sin embargo la realidad es que es un péndulo físico y que la esfera no puede considerarse como una masa puntual. Si L=10R, el error relativo que se comete en el período, al ser considerado como péndulo simple y no físico es del:

a) 1% b) 2,5% c) 4% d) 4,7%

SOL:

Si se considera la esfera oscilando como un péndulo simple su período sería: $T_S = 2\pi\sqrt{L/g}$ (1). Si se la considera como un péndulo físico $T_S = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ (2).

En este caso $I=I_0+ m(L+R)^2= 2mR^2/5 + m(L+R)^2= 2mR^2/5 + m(10R+R)^2= 121,4\ mR^2$, siendo d, la distancia entre el c.d.m. y el de suspensión d= L+R . Sustituyendo los valores en (2),

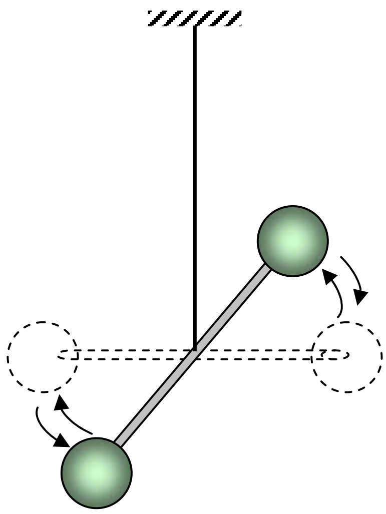
$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{121,4mR^2}{m\cdot 9,8\cdot 11R}} = 2\pi\cdot 1,06\sqrt{R} = 6,67\sqrt{\frac{L}{10}} = 2,11\sqrt{L}$$

$$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2,01\sqrt{L}$$

El error absoluto: $T_F - T_S = (2,11-2,01)\sqrt{L} = 0,10\sqrt{L}$

El error relativo: $\varepsilon = \frac{T_F - T_S}{T_F} = \frac{0,10\sqrt{L}}{2,11\sqrt{L}}100\% = 4,7\%$

Únicamente es correcta la solución d



4.2.42. La balanza de torsión, no fue creada por Cavendish, al medir la constante G, de la gravitación universal, sino años antes, por Michell, geólogo amigo suyo, que impresionado por los resultados del terremoto de Lisboa, ocurrido en 1755, pretendió montar un sistema para detectar movimientos sísmicos, del cual derivó el péndulo de torsión, ideado en 1760. Como ves en el esquema, la balanza o péndulo de torsión implica un sistema capaz de girar un determinado ángulo y que comienza a oscilar, con un determinado periodo debido a las fuerzas recuperadoras que actúan sobre el resorte y que dependen de la constante de torsión del alambre k. Si realiza 40 oscilaciones completas en un minuto, y las masas iguales M, distan del eje 10 cm, dirás que la constante de torsión del alambre es numéricamente igual a:

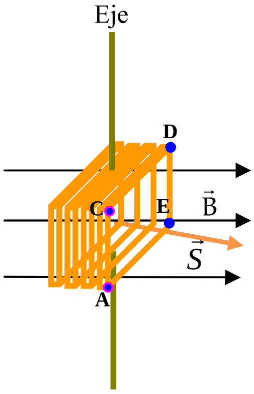
a) 0,1M b) 0,25M c) 0,35M d) 0,5M

SOL:

El período de las oscilaciones de un péndulo de torsión es $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$. El momento de inercia de las dos masas consideradas puntuales es $I = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$, siendo R la distancia del centro de cada una de las esferas al eje de giro, la constante de torsión del alambre será: $k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = 4\pi^2\frac{2MR^2}{T^2}$ (1)

El período T es el tiempo que tarda en realizar una oscilación completa, esto es 60s/40 = 1,5 s. Sustituyendo en la fórmula (1): $k = 4\pi^2\frac{2M\cdot 0,1^2}{1.5^2} = 0,35M$.

La solución correcta será la c.



4.2.43. Los galvanómetros de cuadro móvil se basan en la oscilación que experimenta una bobina cuadrada formado por conductores, cuando por ellos circula la corriente, bajo la acción de un campo magnético. Si el cuadro está formando por 8 espiras cuadradas, de lado L, y masa m y puede oscilar suspendido del punto medio del mismo, dirás que su momento de inercia será:

a) $4mL^2$ b) $10mL^2$ c) $16mL^2/3$ d) $5mL^2$

Si la intensidad de la corriente que circula es de I amperios, la inducción magnética B, e inicialmente las espiras están situadas paralelamente al campo magnético de modo que el vector superficie $\vec{S}$ forma 90º con el campo magnético $\vec{B}$, ¿la aceleración angular con la que iniciará la torsión será en rad/s^2 ?

a) $\frac{3}{2}\frac{IB}{m}$ b) $\frac{IB}{m}$ c) $\frac{2}{3}\frac{IB}{m}$ d) $10\frac{IB}{m}$

SOL:

En el esquema de la figura al oscilar el cuadro móvil suspendido del eje, los lados CD y AE son perpendiculares al mismo y el momento de inercia de cada uno será $\frac{1}{12}mL^2$.

Sin embargo, los AC y ED son paralelos al eje y como todos los puntos están a la misma distancia del mismo, entonces $I_{CA} = \sum m_i r_i^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \sum m_i = m\frac{L^2}{4}$.

El momento de inercia de una espira será: $I_e = 2\cdot\frac{1}{12}mL^2 + 2\cdot m\frac{L_2}{4} = \frac{2}{3}mL^2$

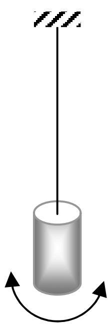
El momento de inercia de las 8 espiras es 8 veces mayor.

$$I = 8\cdot I_e = 8\cdot\frac{2}{3}mL^2 = \frac{16}{3}mL^2$$ La respuesta correcta en la c

El momento mecánico que actúa sobre una bobina recorrida por una corriente I vale $\vec{M} = n I\vec{S}\times\vec{B}$ y su módulo es inicialmente $M = nISB\,\text{sen}\,90^o = 8\cdot I\cdot L^2\cdot B = 8IBL^2$

Como el momento mecánico vale $M = I\cdot\alpha$ igualando resulta.

$$I\cdot\alpha = 8IBL^2\,; \qquad \alpha = \frac{8IBL^2}{16mL^2/3} = \frac{3}{2}\frac{IB}{m}$$



4.2.44. Adaptas a un alambre de torsión un cilindro homogéneo de masa 0,8 kg y radio 2,5 cm y aplicas un par de fuerzas en su periferia. Lo dejas oscilar cronometrando 50 oscilaciones por minuto, podrás asegurar que su constante de torsión k, es:

a) 10 N·m b) 0,1 N·m c) 1 N·m d) 0,0069 N·m

SOL:

El m.d.i. del cilindro respecto del eje vale $I = \frac{1}{2}mR^2$ y el periodo de oscilación está relacionado con k por la ecuación.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$ Del enunciado $T = \frac{60}{50}s = 1{,}2\,s$

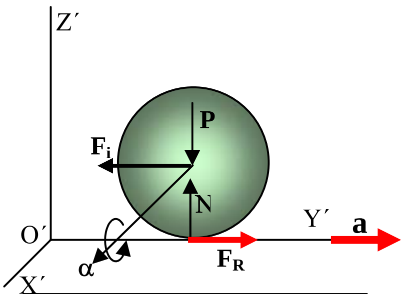
$$T^2 = 4\pi^2\frac{I}{k}; \quad k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = 4\pi^2\frac{mR^2/2}{T^2} = 4\pi^2\frac{0{,}8\,kg\cdot(0{,}025m)^2/2}{1{,}2^2 s^2} = 0{,}0069\,N\cdot m$$

La única solución correcta es la d.

4.2.45. Sobre una tabla horizontal, dispones una esfera metálica, que tiene un coeficiente de rozamiento μ, con la misma de 0,2. Si pretendes que la esfera ruede sin deslizar por la tabla, la aceleración máxima que habrás de comunicarle a ésta, tendrá que ser menor que:

a) 6 m/s^2 b) 9,8 m/s^2 c) 6,9 m/s^2 b) 8 m/s^2

SOL:



$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

$$\vec{a}' + \vec{\alpha} \times \vec{R} = 0;\ a' = -\alpha R$$

Situemos unos ejes (O´; X´Y´Z´) en la tabla y vamos a describir la rodadura de la bola sobre la misma, desde estos ejes. Por llevar la tabla aceleración, aparece sobre la bola la fuerza de inercia $|F_i| = |-ma| = ma$; junto a las otras fuerzas señaladas en el dibujo. Designaremos por a´ la aceleración del c.d.m. de la bola respecto de los ejes en O´. Lãs ecuaciones del movimiento son lãs siguientes:

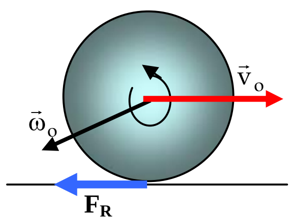
$$\begin{cases} -ma + F_R = ma' \\ R \cdot F_R = I \cdot \alpha \\ a' = -\alpha \cdot R \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5a}{7R}; \quad a' = \frac{7a}{5}; \quad F_R = \frac{2ma}{7}$$

Como la bola rueda y considerando el enunciado del problema tenemos $\mu = 0{,}2$ y $F_R < \mu N$;

$$\frac{2ma}{7} < 0{,}2 \cdot mg \quad \Rightarrow \quad a < \frac{7 \cdot 0{,}2 \cdot 9{,}8}{2} \frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad a < 6{,}9 \frac{m}{s^2}$$

La única solución correcta es la c.

4.2.46. En las competiciones de gimnasia rítmica, con frecuencia observas cómo una gimnasta lanza rodando una pelota sobre una superficie rugosa, y te asombras cuando vuelve girando de nuevo hacia ella. Para que esto ocurra es necesario que:



a) Basta con que la bola salga con cualquier velocidad angular hacia atrás.

b) La velocidad angular de lanzamiento $\omega_o = v_o / R$

c) La velocidad angular de retroceso la adquiere a medida que va deslizando.

d) Solo cuando la velocidad angular de lanzamiento $\omega_o > \frac{5}{2}\frac{v_o}{R}$

SOL:

La gimnasta lanza la bola imprimiéndole una velocidad angular $\vec{\omega}_o$ en el sentido indicado en el dibujo y una velocidad de traslación $\vec{v}_o$. Inicialmente la bola sale deslizando hasta detenerse y después empieza a retroceder rodando. Mientras desliza la fuerza de rozamiento vale $F_R = \mu N = \mu mg$ y la aceleración del c.d.m vale: $-F_R = ma$; $-\mu mg = ma$; $\Rightarrow$ $a = -\mu g$.

El tiempo que transcurre hasta que se para, $\vec{v}_{CM} = 0$; teniendo en cuenta que la aceleración es constante y el movimiento uniformemente retardado.

$$0 = v_o + a t_p \ ; \qquad t_p = \frac{-v_o}{-\mu g} = \frac{v_o}{\mu g}$$

La aceleración angular en esta fase de deslizamiento vale: $-R \cdot F_R = I \cdot \alpha$; $\quad \alpha = \dfrac{-R \cdot \mu mg}{\frac{2}{5} mR^2} = -\dfrac{5}{2}\dfrac{\mu g}{R}$

La velocidad angular ω, cuando se hace nula la velocidad del c.d.m. vale.

$$\omega = \omega_o + \alpha t_p = \omega_o - \frac{5\mu g}{2R}\frac{v_o}{\mu g} = \omega_o - \frac{5}{2}\frac{v_o}{R}$$

Para que pueda retroceder debe haber en este instante t_p velocidad angular distinta de cero y como el sentido de ésta (contrario a las agujas del reloj), se ha tomado positivo, deberá suceder que la diferencia anterior tiene que ser mayor que cero.

$$\omega_o - \frac{5}{2}\frac{v_o}{R} > 0; \qquad \Rightarrow \qquad \omega_o > \frac{5}{2}\frac{v_o}{R}$$

La única solución correcta es la d .