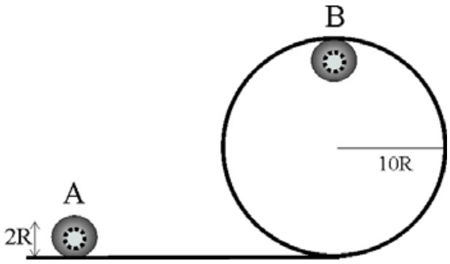
TRABAJO Y ENERGÍA DEL SÓLIDO EN ROTACIÓN. CONSERVACIÓN.



4.3.11. Un cilindro de masa M y radio R se lanza rodando desde A, y debe llegar a B, punto más alto de una circunferencia de radio 10R, sin caerse. La mínima velocidad que deberá llevar en A tendrá que ser:

a) $5\sqrt{gR}$ b) $32\sqrt{gR}$

c) $6{,}12\sqrt{gR}$ d) $50\sqrt{gR}$

SOL:

La energía total del cilindro en el punto más alto del rizo de radio R, que debe sobrepasar con la velocidad mínima v_B, es:

$$E_m = Mv_B^2/2 + Mg.(20R-R) + I\omega^2/2 \qquad (1)$$

Siendo $I = MR^2/2$

Dado que el punto de contacto tiene velocidad nula por rodar; $0 = v_B - \omega R$.

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v_B^2}{R^2} = \frac{1}{4}Mv_B^2$$

Sustituyendo en (1)

$$E_m = \frac{1}{2}Mv_B^2 + 19\,MgR + \frac{1}{4}Mv_B^2 = \frac{3}{4}Mv_B^2 + 19MgR$$

Ahora bien, en el punto más alto del rizo para la velocidad mínima la reacción es N = 0 y debe cumplirse que la fuerza centrípeta es igual al peso:$Mv_B^2/9R = Mg$, por lo que $v_B^2 = 9Rg$ (2). Sustituyendo (2) en la E_m :

$$E_m = \frac{3}{4}Mv_B^2 + 19MgR = \frac{3}{4}M9Rg + 19MgR = \frac{79}{4}MgR$$

Al cumplirse la conservación de la energía mecánica, debe valer igual en A que en B.

$$MgR + \frac{1}{2}Mv_A^2 = \frac{79}{4}MgR \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}v_A^2 = \frac{75gR}{4} \;\Rightarrow\; v_A = \sqrt{\frac{75gR}{2}} = 6{,}12\sqrt{gR}$$

La solución correcta es c)

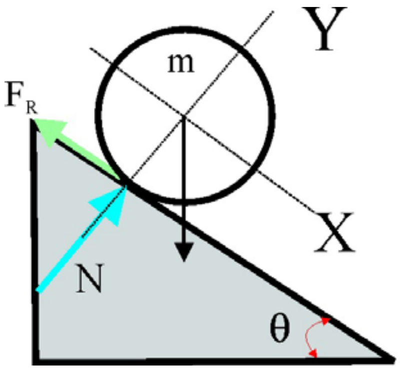
4.3.12. Si sitúas en la parte superior de un plano inclinado 30º, una esfera de masa m y un cilindro de igual radio, pero de masa 2m, y los dejas rodar, dirás que:
a) EL CILINDRO LLEGARÁ ANTES A LA BASE DEL PLANO
b) LA ESFERA TENDRÁ MAYOR VELOCIDAD EN LA BASE DEL PLANO
c) LA FUERZA QUE HACE RODAR A AMBOS CUERPOS ES LA MISMA
d) LA FUERZA DE ROZAMIENTO QUE ACTÚA SOBRE EL CILINDRO ES EL DOBLE DE LA QUE ACTÚA SOBRE LA ESFERA
SOL:
Para una esfera que rueda con velocidad angular ω, La energía cinética de rotación es $I\omega^2/2$, e $I = 2mr^2/5$ por ser el eje de rotación un diámetro. Por ello, aplicando la conservación de la energía mecánica valdrá lo mismo en la parte superior (potencial) que en la base (cinética).

E.Potencial = E_C.de traslación del centro de masas + E_C.rotación

$$mgH = mv^2_{CM}/2 + I\omega^2/2 = mv^2_{CM}/2 + 2mr^2\omega^2/10$$

Por rodar, $v_{CM} = \omega r$,

$$mgH = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{5}mr^2\frac{v_{CM}^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv_{CM}^2 \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{10gH}{7}} = 1{,}195\sqrt{gH}$$



Aplicando el mismo razonamiento para el cilindro, $I = 2m\cdot r^2/2 = mr^2$

$$2mgH = 2mv^2_{CM}/2 + I\omega^2/2 = 2mv^2_{CM}/2 + mr^2\omega^2/2 = 1{,}5mv^2_{CM};$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4gH}{3}} = 1{,}155\sqrt{gH}$$

La velocidad final de la esfera es mayor que la del cilindro. La respuesta b), es verdadera.

La fuerza de rozamiento la vamos a calcular en un caso general y después la aplicaremos a cada uno de los dos cuerpos. Ver la figura.

Tomando unos ejes en la dirección del plano inclinado y momentos respecto de un eje perpendicular a la figura que pase por su centro de masas y aplicando las ecuaciones de la Dinámica resulta:

$$\sum F_x = m\,a_{CM} \quad ; \; m\,g\,sen\theta - F_R = m\,a_{CM}$$
$$F_R\,R = I\,\alpha$$
$$a_{CM} = \alpha R$$

Operando resulta: $F_R = \dfrac{m\,g\,sen\theta}{1 + \dfrac{mR^2}{I}}$

Para el cilindro de masa 2m y radio R.

$$F_{R,C} = \frac{2\,m\,g\,sen\theta}{1+\dfrac{2mR^2}{\dfrac{2mR^2}{2}}} = \frac{2\,m\,g\,sen\theta}{3} = 0{,}677\,m\,g\,sen\theta$$

Para la esfera de masa m y radio R.

$$F_{R,E} = \frac{m\,g\,sen\theta}{1+\dfrac{mR^2}{\dfrac{2mR^2}{5}}} = \frac{2\,m\,g\,sen\theta}{7} = 0{,}286\,m\,g\,sen\theta$$

$F_{R,C} > F_{R,E}$ Tanto la respuesta c), como la d), son incorrectas.

4.3.13. Si sitúas un trozo de tubo metálico hueco (corteza) y otro macizo del mismo radio y masa, encima de un plano inclinado 45º, y los dejas rodar sin deslizar, dirás que:

a) LLEGA ANTES A LA BASE DEL PLANO EL HUECO
b) TIENE MAYOR MOMENTO DE INERCIA EL MACIZO
c) TIENE MAYOR VELOCIDAD EN LA BASE DEL PLANO, EL HUECO
d) ES MAYOR LA FUERZA DE ROZAMIENTO SOBRE EL CILINDRO MACIZO.

SOL:

Para contestar a la cuestión a), llegará antes a la base, el que lo haga con mayor velocidad.
El m.d.i de un sistema de partículas respecto de un eje es $I = \sum m_i r_i^2$. Si el cuerpo es hueco y su espesor se considera despreciable, entonces todas sus partículas están a la misma distancia del eje y todos los r_i son iguales, con lo que salen del sumatorio y entonces $\sum m_i = m$ que es la masa total del cuerpo. Resulta para el m.d.i. $I = mR^2$.
Si el cilindro es macizo $I = \frac{1}{2} mR^2$.
Tiene mayor m.d.i el cilindro hueco, la respuesta b) es incorrecta.

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.

$$mgH = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}^2}{R^2} = \frac{1}{2}v_{CM}^2\left(m+\frac{I}{R^2}\right)$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2mgH}{\left(m+\frac{I}{R^2}\right)}}$$

Aplicación al cilindro hueco:

$$v_{CM,H} = \sqrt{\frac{2\,mgH}{m+\dfrac{mR^2}{R^2}}} = \sqrt{gH}$$

Aplicación al cilindro macizo:

$$v_{CM,M} = \sqrt{\frac{2\,mgH}{m + \frac{mR^2}{2\,R^2}}} = \sqrt{\frac{4\,m\;g\,H}{3\,m}} = 1{,}15\sqrt{gH}$$

La velocidad del cilindro macizo al llegar a la base, es superior a la del cilindro hueco. Las respuestas a) y c) son incorrectas.

Para la fuerza de rozamiento, el razonamiento es análogo al de la cuestión 4.3.12. de modo que tomando el resultado.

$$F_R = \frac{mg\;sen\;\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

Para el cilindro hueco:

$$F_{R,H} = \frac{m\,g\;sen\theta}{1 + \frac{mR^2}{mR^2}} = \frac{mg\;sen\theta}{2}$$

Para el cilindro macizo:

$$F_{R,H} = \frac{m\,g\;sen\theta}{1 + \frac{mR^2}{\frac{mR^2}{2}}} = \frac{mg\;sen\theta}{3}$$

Resultando: $F_{R,H} > F_{R,M}$. La respuesta d) es incorrecta.

4.3.14. El péndulo asimétrico es un sistema atribuido a Galileo, en el cual un péndulo simple formado por una esferita de masa m (que suponemos puntual), ligada a un hilo inextensible de longitud L, separado de su posición de equilibrio, y obligado a oscilar, ve interrumpida su trayectoria por un vástago situado a una distancia D del punto de suspensión del hilo, que le obliga a girar, describiendo inicialmente una circunferencia de radio R. Cuando la esferita ha descrito media circunferencia, la tensión del hilo es dos veces el peso de ella

La diferencia de alturas H entre la posición más alta de la esfera y la más baja es:

a) 1,5R b) 2,5R c) 3,5R d) 4,5R

b) Si el péndulo inicialmente formaba un ángulo de 60º con la dirección vertical, el valor del radio R de la circunferencia es:

a) $\frac{L}{4}$ b) $\frac{L}{5}$ c) $\frac{L}{6}$ d) $\frac{L}{7}$

SOL:

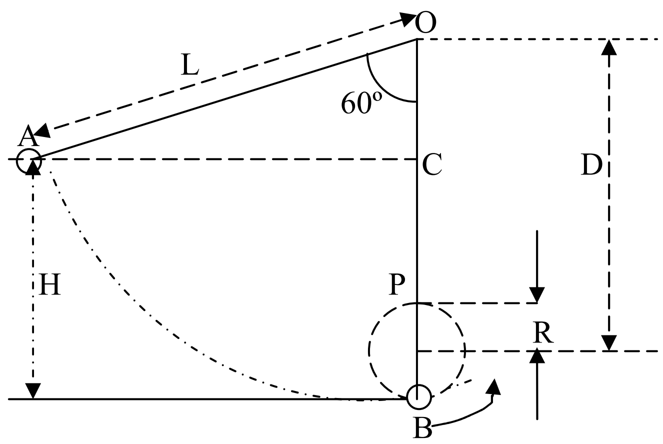
Calculamos la velocidad que tiene la esferita cuando ha descrito media circunferencia de radio R, esto es, la velocidad en el punto P de la figura.

La tensión de la cuerda más el peso proporcionan la fuerza centrípeta

$$T + mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow 3g = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{3\,g\,R}$$

Aplicamos en principio de conservación de la energía entre la posición inicial A y la posición más baja B.

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg\,2R = \frac{1}{2}m \cdot 3gR + 2mgR \Rightarrow H = 3{,}5R$$



$$OC = L - H \;\; ; \;\; \cos 60^o = \frac{OC}{L} = \frac{L-H}{L} = 1 - \frac{3{,}5R}{L} = 0{,}5 \Rightarrow R = \frac{L}{7}$$

4.3.15. Si de un pozo, a 4 metros de profundidad, extraes agua con un cubo que lleno de agua tiene una masa 5M, haciendo una fuerza constante durante 10 segundos, sobre una cuerda de masa despreciable, que pasa por una polea de masa M, y radio R, el trabajo realizado para extraer el agua será:

a) 200M b) 100M c) 49M d) 400M

SOL:

La velocidade media

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{4\ m}{10\ s} = 0{,}4\ \frac{m}{s}$$

si la cuerda no desliza en la polea

$$\omega = \frac{v_m}{R} = \frac{0{,}4}{R}$$

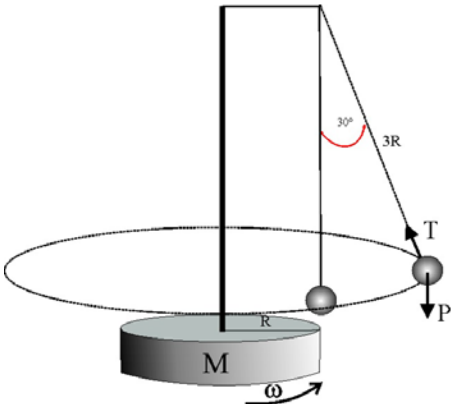
El trabajo de la fuerza aplicada a la cuerda, se invierte en energias cinética y potencial del sistema.

$$F\,\Delta r = E_C + E_{CR} + E_P = \frac{1}{2}5Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 5Mg\,\Delta r = \frac{5}{2}M\,0{,}4^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + 5Mg\,\Delta r$$

$$F \cdot 4 = 0{,}4M + 0{,}08\,M + 5\,M \cdot 9{,}8 \cdot 4 = 196{,}48\,M$$

$$F = \frac{196{,}48\,M}{4} = 49{,}12\,M \approx 49\,M$$

La respuesta correcta es la c)



4.3.16. En el esquema de la figura, al girar una plataforma de masa M, y radio R, con un soporte de masa despreciable del que cuelga un péndulo simple, de longitud 3R, éste se separa un ángulo de 30º, con este dato podrás asegurar que la energía cinética de rotación de la plataforma será:

a) $MRg/3\sqrt{3}$; b) 0,173 MRg ; c) MRg ; d)0,5 MRg

SOL:

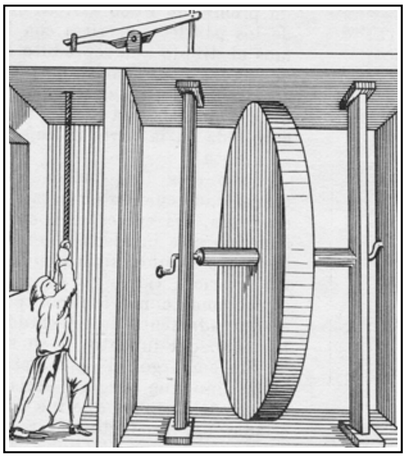
T cos 30º = P ; $m\omega^2\cdot(3R \text{ sen } 30º + R)$ = T sen 30º = P tag 30º = mg tag 30º

$$\omega^2 = \frac{g \text{ tag } 30º}{2{,}5\,R}$$

Considerando a la masa m despreciable frente a M, la energía cinética de rotación de la plataforma será:

$$E_{CR} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{g \text{ tag } 30º}{2{,}5\,R}\right) = MRg\frac{\text{tag } 30º}{10} = 0{,}173MRg \quad 0{,}058MgR$$

La solución correcta es la b)



4.3.17. La rueda de Ofirius, fue una famosa rueda que giraba sin parar durante meses, y que causó asombro en la Europa de comienzos del siglo XVIII. El misterio del móvil perpetuo se descubrió por una pequeña traición familiar que reveló que se mantenía mediante el mecanismo adjunto, según dibujo de la época. Un hombre escondido tirando de una cuerda, suministraba la energía de rotación perdida a través de los rozamientos. Si la masa del hombre era 10 veces inferior a la de la rueda, y colgándose de la cuerda hacía descender su centro de gravedad una distancia tal como el radio de la rueda, la velocidad angular adquirida por la rueda en el caso de que estuviera parada sería, despreciando posibles pérdidas energéticas:

a) $\frac{2}{\sqrt{R}}$ b) $2\sqrt{R}$ c) $\sqrt{\frac{4g}{10R}}$ d) $\sqrt{\frac{5R}{4g}}$

SOL:

La energia potencial que cede el hombre al bajar muy lentamente (podemos despreciar la energia cinética que adquiere) se invierte en energia cinética de rotación de la rueda.

$$\frac{M\,g\,R}{10} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M\,R^2\omega^2 \;\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4\,g}{10\,R}}$$

La respuesta correcta es la c)

4.3.18. En el yo-yo, cuando se desenrolla la cuerda y desciende luego comienza a subir por si mismo, sin darle impulso. Al subir dicha masa en el campo gravitatorio se debe efectuar un trabajo, si tu misión no es tirar del hilo, dirás que el yo-yo asciende:

a) POR SU PROPIO PESO
b) QUE CONSERVA SU ENERGÍA MECÁNICA
c) PORQUE LA ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN NO SE CONSERVA.
d) PORQUE SE CONSERVA EL MOMENTO ANGULAR.

SOL:

Al descender el yo-yo de radio r y longitud del hilo L, la disminución de la energía potencial al llegar al final del recorrido del hilo, se transforma en energía cinética de rotación

$$mgL = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \quad ; \quad \omega = \frac{2\sqrt{gL}}{r}$$

En esta posición, la tensión de la cuerda al pasar por el c.d.m. no da momento y entonces se conserva el momento angular y en consecuencia la velocidad angular ω, ya que no cambia el m.d.i. (recuérdese que L = I·ω). La conservación del momento angular hace que empiece a subir girando en el mismo sentido y si el rozamiento fuera despreciable volvería a llegar a la misma altura, transformándose la energía cinética de rotación en potencial gravitatoria.

Las respuestas b) y d) son correctas.