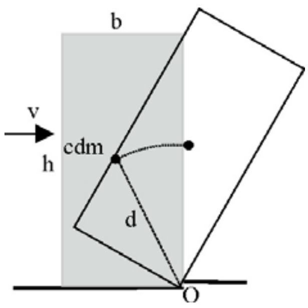
4.4. CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR (continuación)

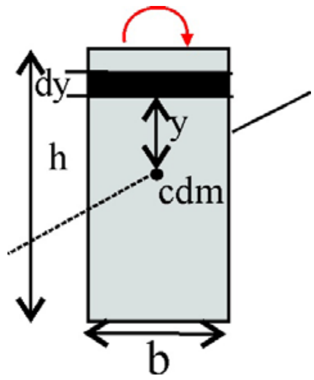


4.4.13. Un paralelepípedo cuya altura h es doble de la arista de la base b, se desliza por una mesa. Al cabo de cierto tiempo tropieza con el borde de otra mesa desnivelada respecto a la inicial, volcando sobre ésta. Para que esto ocurra la velocidad v que deberá tener su centro de masas inicialmente tendrá que ser en ms^{-1}, mayor que:

a) $bg\sqrt{2,7}$ b) $\sqrt{0,37gb}$ c) $\sqrt{2,7gb}$ d) $\sqrt{3,7gb}$

Mientras que la relación entre las velocidades del centro de masas antes y después de la colisión deberá ser:

a) 1 b) 1,4 c) 1,5 d) 1,6



SOL:
En la figura está representada por el corte rectangular de dimensiones b y h. Sobre ella aparece destacada una sección que tiene por base b y por altura dy.
Dicha sección dista del eje del c.d.m. la distancia y. Observe que y es una variable ya que la sección señalada puede estar más o menos alejada del c.d.m. Si se toma un origen de distancias de y en el c.d.m. entonces los límites de la variable y son: -h/2 y +h/2.
El momento de inercia de esa sección es $dI=dm\cdot y^2$, siendo su masa dm =b.dy. σ
El momento de inercia de toda la chapa respecto de un eje perpendicular que pase por el c.d.m. es la integral:

$$I_{cdm}=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dm=\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b.\sigma.y^2 dy=\sigma.b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}=\frac{\sigma.b.h^3}{12}$$

La masa de toda la chapa es: σ bh, si llevamos este valor a la expresión inmediata anterior resulta que el momento de inercia es: $I_{cdm}=\frac{mh^2}{12}=\frac{mb^2}{3}$. Dado que h=2b.

Ahora habrá que calcular el momento de inercia respecto al punto O, aplicando el teorema de Steiner. $I_O=I_{cdm}+md^2$.
Calculando a partir del teorema de Pitágoras d.

$d^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{5b^2}{4}$; $d=\frac{b\sqrt{5}}{2}$; Sustituyendo $I_O=I_{cdm}+md^2=\frac{mb^2}{3}+\frac{5mb^2}{4}=\frac{19mb^2}{12}$.

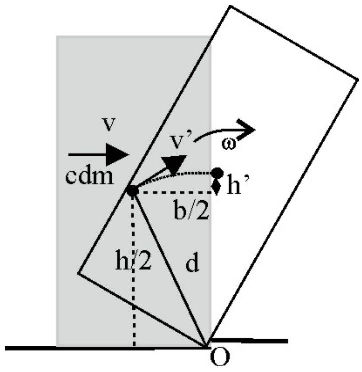
Al chocar y girar con velocidad angular ω alrededor de O, deberá conservarse el impulso angular, $L=I_o\cdot\omega=r\cdot m\cdot v$ y por lo tanto, $I_O\omega=\frac{h}{2}mv=bmv$.

Sustituyendo, $\frac{19mb^2}{12}\omega=bmv$. Despejando $\omega=\frac{12v}{19b}$.

Como la velocidad del c.d.m. después del choque será v´= ω·d resulta: $v'=\frac{12v}{19b}.\frac{b\sqrt{5}}{2}=\frac{6v\sqrt{5}}{19}$.

Despejando $\frac{v}{v'}=\frac{19}{6\sqrt{5}}=1,41$, que coincide con la propuesta b

Ahora bien, al tumbarse, la altura del c.d.m, aumenta en h' y por lo tanto su energía potencial, a expensas de la energía cinética de rotación, por lo tanto.



$$mgh' = \frac{I_O\omega^2}{2}.\quad \text{Como } h' = d - \frac{h}{2} = d - b = \frac{b\sqrt{5}}{2} - b = b\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)$$

$$mgb\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) = \frac{\frac{19mb^2}{12}}{2}.\left(\frac{12v}{19b}\right)^2 = \frac{12mv^2}{38}.\ \text{Simplificando, y despejando}$$

$$v = \sqrt{\frac{19gb\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right)}{6}} = \sqrt{0,37gb}\ \text{, como se propone en b}$$

La cuestión también puede resolverse considerando el giro respecto del centro de masas.

$$mv\frac{h}{2} = mv'd + I_{CM}\omega \Rightarrow \quad mvb = mv'\frac{\sqrt{h^2+b^2}}{2} + \frac{mb^2}{3}\omega \Rightarrow \quad mvb = mv'\frac{\sqrt{5}b}{2} + \frac{mb^2}{3}\omega \Rightarrow$$

$$vb = \omega d\frac{\sqrt{5}b}{2} + \frac{mb^2}{3}\omega \Rightarrow \quad v = \frac{5}{4}b\omega + \frac{b\omega}{3} = \frac{19}{12}b\omega \Rightarrow \quad \omega = \frac{12v}{19b}$$

Relación entre velocidades

$$v' = \omega d = \frac{12v}{19b}\frac{\sqrt{5}b}{2} \Rightarrow \frac{v}{v'} = \frac{38}{12\sqrt{5}} = 1,4$$

Conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = mgh' \Rightarrow m\frac{v^2}{1,41^2} + \frac{mb^2}{3}\frac{144v^2}{361b^2} \Rightarrow 2gh' = 0,503v^2 + 0,133v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0,636v^2 = 2gb\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1\right) \Rightarrow \quad v = \sqrt{0,37bg}$$

4.4.14*. En las colisiones ya sean elásticas o inelásticas, entre cuerpos rígidos que se trasladan y ruedan, la conservación del momento cinético implica considerar:

a) LA VELOCIDAD DE TRASLACIÓN Y DE ROTACIÓN DE CADA CUERPO ANTES Y DESPUÉS DE LA COLISIÓN
b) EL PUNTO DONDE SE EFECTÚA LA COLISIÓN
c) EL EJE DE GIRO DEL SISTEMA CAPAZ DE OSCILAR
d) EL CENTRO DE PERCUSIÓN DONDE SE EFECTÚA EL IMPACTO

SOL:

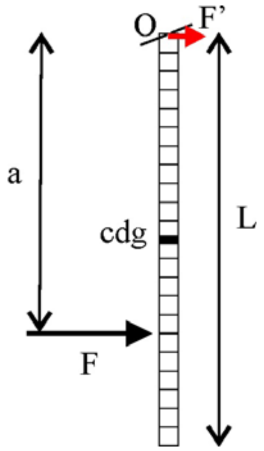
Dado que el momento angular del sistema es constante: $\vec{L}_{Sistema} = I_P\vec{\omega}_P + \vec{R}\times M\vec{v}$, y sólo habrá de considerarse las velocidades de rotación y traslación antes y después de la colisión. Únicamente es válida la respuesta a.

4.4.15. El centro de percusión, es un punto determinante de la cinemática del sólido rígido sobre el que actúan fuerzas externas. De él podrás decir que:

a) ES EL PUNTO DONDE ACTÚA LA RESULTANTE DE LAS FUERZAS EXTERNAS
b) ES EL PUNTO DE INTERCESIÓN DE LA LINEA DE ACCIÓN DE LA RESULTANTE DE LAS FUERZAS EXTERNAS CON EL EJE DEL CUERPO CAPAZ DE OSCILAR
c) ES EL PUNTO DONDE LA FUERZA DE REACCIÓN EJERCIDA POR EL EJE SOBRE EL QUE OSCILA EL CUERPO, ES NULA.
d) ES EL PUNTO DESDE EL CUAL GIRA EL SISTEMA

SOL:

El centro de percusión es el punto del sólido capaz de oscilar, tal que cuando se aplican fuerzas externas, no se produce reacción en el pivote sobre el que oscila, y por lo tanto el efecto de una fuerza sobre ese punto sólo va a producir un giro alrededor del centro de suspensión. La propuesta correcta es la d



4.4.16. Dada la palanca didáctica del dibujo, de masa m y longitud L, capaz de oscilar desde su extremo O, al aplicar una fuerza F, a una distancia de O, ¾ de L, dirás que la fuerza de reacción que ejerce el eje de giro sobre la varilla en ese instante es:

a) F/2 b) F/4 c) F/8 d) F/10

SOL:

Al aplicar la fuerza F a una distancia a del centro de oscilación, el momento que hace oscilar a la varilla será: $\vec{M} = I\vec{\alpha}$, o sea $\vec{a}\wedge\vec{F} = I\vec{\alpha}$. Realizando los productos vectorial , $\alpha = \frac{aF}{I}$, y teniendo en cuenta que I de una varilla capaz de oscilar por un eje que pasa por su extremo es $I = \frac{mL^2}{3}$ .De lo que la aceleración angular $\alpha = \frac{3aF}{mL^2}$, por lo que la aceleración del centro de masas de la varilla= $a_{CM} = \alpha\frac{L}{2} = \frac{3aF}{2mL}$

Si aplicamos la 2ª Ley de Newton al movimiento del cdm del sistema. $\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a}_{CM} = \vec{F} + \vec{F}\,' = \frac{m.3\vec{F}a}{2mL} = \frac{3a\vec{F}}{2L}$. Despejando F', $\vec{F}\,' = \left(\frac{3a}{2L} - 1\right)\vec{F}$. Como a= 3L/4, $\vec{F}\,' = \left(\frac{9}{8} - 1\right)\vec{F} = \frac{\vec{F}}{8}$. Por lo tanto la fuerza F' tiene el mismo sentido que F y es su octava parte como se indica en c.

Consideramos que la fuerza F crea un momento Δp y aparece otro momento en O que denominamos Δp´. La distancia de este al centro de masas el L/2 y la distancia de Δp al centro de masas la designamos con b.

$$\Delta p - \Delta p' = mv_{CM} \quad ; \quad \Delta p \cdot b - \Delta p' \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{12} mL^2 \omega \quad ; \quad v_{CM} = \omega \cdot \frac{L}{2}$$

Operando:

$$\frac{\Delta p - \Delta p'}{m} = v_{CM} \quad ; \quad \Delta p \cdot b - \Delta p' \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{12} mL^2 \frac{2 v_{CM}}{L} \quad ; \quad v_{CM} = \omega \cdot \frac{L}{2}$$

$$\Delta p \cdot b - \Delta p \cdot \frac{L}{2} = \frac{mL}{6}\left(\frac{\Delta p - \Delta p'}{m}\right) \Rightarrow \Delta p\left(b - \frac{L}{6}\right) = \Delta p'\left(\frac{L}{6} + \frac{L}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p' = \frac{b - \frac{L}{6}}{\frac{2}{3}L} \Delta p \qquad (1)$$

Si b=L/6 F ase aplica en el centro de percusión y no hay reacción en O

Si b>L/6 la fuerza aplicada en O es hacia la derecha

Como en nuestro caso b= (3/4)L>L/6 la fuerza en O es hacia la derecha..

4.4.17. Si la fuerza externa se aplica de la misma forma que en el ejercicio anterior, pero haciéndola a= 2/3 L, la fuerza de reacción que ejerce el pivote sobre el cuerpo que oscila:

a) AUMENTARÁ Y CAMBIARÁ DE SENTIDO b) DISMINUIRÁ
c) CAMBIARÁ DE SENTIDO d) SE ANULARÁ

SOL:

El valor de la distancia al centro de masas es: $b = \frac{2}{3}L - \frac{L}{2} = \frac{1}{6}L$ .Aplicando la ecuación (1) resulta que la fuerza aplicada en O es nula. Corresponde a aplicar la fuerza en el centro de percusión. Por lo tanto la opción correcta es la d.

4.4.18. El béisbol, es un deporte característico en el que se estudia la colisión entre sólidos rígidos, aunque la pelota sea ligeramente elástica. La bola debe golpear en el bate en un punto determinado, cuya intercepción con el eje del mismo, determina el centro de percusión, punto dulce o sweetpoot que en el dibujo sería aproximadamente el punto:

a) A b) B c) C d) D

SOL:

El punto dulce o centro de percusión de un bate, es el punto en el que la mano no debe sentir fuerza de traslación, y el menor número de vibraciones producidas por la colisión parcialmente elástica de la pelota, por lo tanto no puede estar ni sobre el extremo ni en el punto de sujeción. Asimilando el bate de béisbol a un cilindro uniforme y de acuerdo con la ecuación (1), el punto debe ser C.

4.4.19. Un disco homogéneo de masa 10M, y radio R se encuentra girando sobre un eje que pasa por su centro, con una velocidad ω .En un momento determinado cae sobre él, una masa M, quedando adherida a su superficie y a una distancia d del eje=R/2. Dirás que la velocidad del disco después de la caída será:

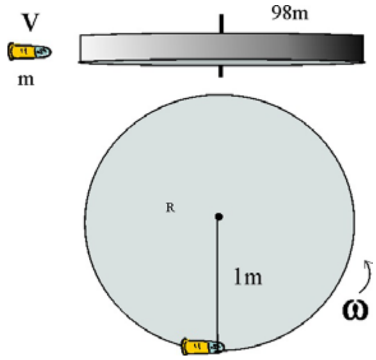
a) 16ω/17 b) 20ω/21 c) 2ω/3 d) 2ω/5

SOL:

Dado que debe conservarse el impuso angular del sistema, y considerando la masa M que cae como puntual

$I_D\omega = \left(I_D + Md^2\right)\omega'$. ustituyendo los valores, teniendo en cuenta que $I_D = \frac{M_D R^2}{2} = 5MR^2$

$5MR^2\omega = \left(5MR^2 + \frac{MR^2}{4}\right)\omega'$. Simplificando y operando: $5\omega = \frac{21}{4}\omega'$, de lo que $\omega' = \frac{20}{21}\omega$, tal como se propone en b.



4.4.20. Se dispara una bala de masa m con una velocidad v, sobre un disco de masa 98m, y radio R=1m, en reposo capaz de girar por un eje que pasa por su centro. La bala queda incrustada en la periferia del disco. La velocidad con que girará el sistema bala disco después del impacto será en rad.s^{-1}:

a) v/10 b) v/100 c) v/50 d) v/1

Mientras que la energía perdida en la colisión inelástica es respecto a la inicial el:

a) 50% b) 49% c) 99% d) 98%

SOL:

Se trata de una colisión inelástica y no se conserva la energía, aunque sí. el momento cinético o angular. Por lo tanto:

$Rmv = \left(I_D + mR^2\right)\omega$; $Rmv = \left(\frac{98mR^2}{2} + mR^2\right)\omega = 50mR^2\omega$. Simplificando y despejando $\omega = \frac{v}{50R}$, por lo que numéricamente $\omega = \frac{v}{50} rad.s^{-1}$, como se propone en c.

La pérdida de energía, debido al trabajo de deformación Q, que experimenta el sistema será la diferencia entre la energía cinética inicial y final, después de la colisión: Q = $\frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{98mR^2}{2} + mR^2\right)\omega^2$.

Operando y teniendo en cuenta el valor de la velocidad angular: Q=$\frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2}50mR^2\left(\frac{v}{50R}\right)^2$.

Simplificando $0,5mv^2 - 0,01mv^2 = 0,49mv^2$. Por lo que dicha cantidad respecto a la inicial será $100\left(\frac{0,49mv^2}{0,50mv^2}\right) = 98\%$, como se propone en d.

4.4.21. Una palanca didáctica (varilla con orificios) de longitud L, y masa m, se suspende de su orificio central y se sitúa horizontalmente, en ese momento cae un chiche de masa m/100, desde una altura h=2L, quedando pegado en el extremo de la varilla. De este hecho deducirás que la velocidad angular con que oscilará la varilla en este instante, en unidades del sistema internacional, será de aproximadamente:

a) $0,500\sqrt{\frac{L}{g}}$ b) $0,415\sqrt{\frac{L}{g}}$ c) $0,116\sqrt{\frac{L}{g}}$ d) $0,235\sqrt{\frac{L}{g}}$

Mientras que el trabajo de deformación experimentado por el chicle será respecto a la energía que tenía un:

a) 100% b) 67% c) 97% d) 82%

SOL:

Es evidente que no deberá conservarse la energía del sistema chicle-palanca didáctica ya que se trata de una colisión inelástica y por otra parte el impulso angular que proporciona la caída del chicle sobre el extremo de la palanca didáctica, debe proporcionar el impulso angular del sistema palanca-chicle cuando comienza a girar con una velocidad angular ω. Por lo tanto, en el instante de la colisión, la variación de energía potencial que experimenta el chicle, será igual al aumento de la cinética de rotación que experimenta la palanca-chicle, (considerando a éste como una masa puntual , que cae a una distancia d= L/2 del eje de giro) + el trabajo de deformación experimentado por el chicle en la colisión inelástica Q. Así:

$\frac{m}{100}g.2L = \frac{I}{2}\omega^2 + Q$. Teniendo en cuenta que $I = I_v + m_{chicle}.d^2$; $\frac{m}{100}g.2L = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{100}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega^2 + Q$

Por otra parte la conservación del momento angular cuyo módulo, $m \cdot v \cdot r = I_{Sistema} \cdot \omega$ exige que:

$$; \qquad \frac{m}{100}v\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{100}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega.$$

La velocidad v se puede calcular aplicando la conservación de la energía al movimiento del chicle

Energía potencial = Energía cinética del chicle. $\frac{m}{100}g.2L = \frac{1}{2}.\frac{m}{100}v^2$, de lo que $v = \sqrt{4Lg}$

Sustituyendo su valor en el momento angular, $\frac{m}{100}\sqrt{4Lg}\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{100}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega = \left(\frac{103mL^2}{1200}\right)\omega.$

Simplificando y despejando la velocidad angular: $\omega = \frac{12\sqrt{Lg}}{103L} = 0,116\sqrt{\frac{g}{L}}$, que corresponde a la propuesta c

Para calcular la pérdida de energía en trabajo de deformación del chicle Q, se despejará en la expresión primera sustituyendo el valor de la velocidad angular

$$\frac{m}{100}g.2L = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{100}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega^2 + Q;$$

$$Q = \frac{m}{100}g.2L - \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12} + \frac{m}{100}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\left(\frac{0,116^2 g}{L}\right) = \frac{1,9417mgL}{100}$$

Para calcular la fracción de la energía del chicle que se transforma en trabajo de deformación, dividiremos por mg2L/100 .Así E=0,97 , o sea el 97%, tal como se menciona en c.

4.4.22*. Una bala de 40g y velocidad 20m/s choca y se empotra sobre una barra de 960g y 1m de longitud en su extremo inferior. La barra es capaz de oscilar sobre un eje perpendicular al extremo opuesto. De los fenómenos que ocurren dirás que debido a este hecho:

a) LA VELOCIDAD ANGULAR CON QUE SE MUEVE EL SISTEMA ES 2,2 rad/s
b) LA ENERGÍA PERDIDA EN LA COLISIÓN ES 7,11 J
c) LA MÁXIMA ALTURA H QUE ALCANZA LA VARILLA ES 0,50 m
d) EL PERIODO DE LAS OSCILACIONES QUE REALIZA DESPUÉS, ES 1,34 s

SOL:

Operando como en el caso anterior, aunque en condiciones numéricas, considerando la bala como una masa puntual m, tendremos que al conservarse en el instante de la colisión el momento angular: Lmv= Iw. Como oscila desde un extremo, I de la barra de masa M, es I= $ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$

$mvL = \left(\frac{ML^2}{3} + m(L)^2\right)\omega$;. Sustituyendo los valores en el SI. .(40/1000) · 1·20 = [(960/1000).1^2/3 + (40/1000).1^2].ω ;

0,8 = 0,36ω; ω= 2,22 rad/s. Siendo 0,36 el I, del sistema varilla-bala en unidades del SI (I).

La variación de energía en la colisión, o trabajo de deformación $Q = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2$. Sustituyendo :

Q = (40/1000).20^2/2 - 0,36.2,22^2/2 = 8 - 0,889 = 7,11 J.

La máxima altura alcanzada por el c.d.m.del sistema, se calcularía a través de la conservación de la energía mecánica, después de la colisión $mgH = \frac{1}{2}I\omega^2$, siendo H el aumento de altura de la posición del c.d.m. del sistema después del choque, hasta que alcanza el punto más alto. Así 0,888 = [(960+40)/1000].9,8.H; H=0,888/9,8 = 0,0906m

La opción c) es incorrecta.

Una vez que la bala está incrustada en la barra determinamos la posición del centro de masas del sistema barra-barra respecto del centro de suspensión

$$d = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{M + m} = \frac{0{,}960 \cdot 0{,}5 + 0{,}040 \cdot 1}{0{,}960 + 0{,}040} = 0{,}52m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{(M+m)gd}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}36}{1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}52}} = 1{,}67\,s$$

La opción d, es incorrecta.