Campos 6S

101. Se ha visto que en los campos conservativos la divergencia era siempre distinta de cero, $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}\neq 0$ y por otra parte en dichos campos $\vec{I}=-\vec{\nabla}V$, de lo que $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}=\vec{\nabla}\bullet\left(-\vec{\nabla}V\right)=-\nabla^2 V$, esta expresión así simbolizada que no es mas que la divergencia del gradiente de V, se conoce con el nombre de:

a) ROTACIONAL b) DERIVADA SEGUNDA
c) LAPLACIANA d) DERIVADA PARCIAL

SOL:
Como se verá en los enunciados de los test siguientes, se conoce como laplaciana en honor al científico francés Laplace, que había propuesto una ecuación con derivadas segundas del potencial. Es correcta la propuesta c.

102*. La derivada segunda de una función, ya fue definida por Hamilton en 1847, y representada por $-\lhd^2=\left(\frac{d}{dx}\right)^2+\left(\frac{d}{dy}\right)^2+\left(\frac{d}{dz}\right)^2$, mucho antes que Maxwell en 1870 y en su tratado “Clasificación matemática de las cantidades físicas”, lo expusiera como: $\nabla^2=-\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)$, y la bautizara como “*concentración de la función*”. La ecuación con la derivada segunda había sido formulada en 1811 por Poisson y nominada como laplaciana puesto que también figuraba en la ecuación del potencial de Laplace pero su simbolismo actual fue creado mucho después. De esta forma la divergencia del gradiente se simboliza por:

a) $-\nabla^2$ b) $\nabla^2$ c) $\nabla$ d) $\Delta$

SOL:
El simbolismo de la laplaciana puede ser $\nabla^2$, y actualmente aunque se confunda con el de incremento, $\Delta$.

103. Como los campos conservativos, y en los cuales su intensidad deriva de un potencial a través del gradiente, tenían una divergencia distinta de cero, podrás decir que siempre que el campo sea conservativo su laplaciana deberá ser:

a) 0 b) > 0 c) <0 d) $\neq 0$

SOL:
Distinta de cero, así en el campo gravitatorio es $\nabla^2 V=4\pi G\rho$ (campo convergente), mientras que en el campo eléctrico creado por la carga positiva (campo divergente) será $\nabla^2 V=-4\pi k\rho=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, siendo $\rho$ ,la densidad volúmica de masa o de carga según la fuente de campo. Debe recordarse que $\vec{\nabla}\bullet\vec{I}=\vec{\nabla}\bullet\left(-\vec{\nabla}V\right)=-\nabla^2 V$.

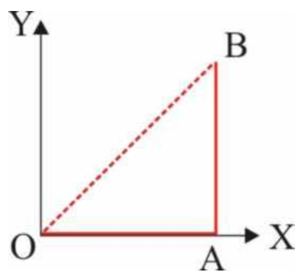
104. Si te dicen que un campo de fuerza $\Delta$ V es mayor que cero asegurarás que se trata de un campo

a) CONSERVATIVO CONVERGENTE b) CONSERVATIVO DIVERGENTE
c) DE FLUJO CONSERVATIVO d) NO CONSERVATIVO

SOL:
Por lo dicho anteriormente será un campo convergente como el gravitatorio. Naturalmente si en una parte del espacio no existen sumideros de líneas de flujo, podrá ser de flujo conservativo. La propuesta correcta es la b

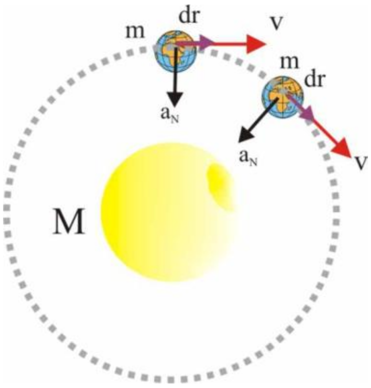
105. O (0,0), B (2,2) y A (2,0), son puntos situados en un campo gravitatorio, por lo que al hacer circular la unidad de magnitud activa desde O hasta B, directamente o a través de A, dan sucesivamente:

a) -2g y 2g b) -2g y -2g c) 2g y -2g d) 2g y 2g




SOL:
a) Dado que la intensidad del campo gravitatorio es -g **j** .
Por el camino inferior OAB: $C_1=-g\,\vec{j}\bullet\left(2\vec{i}+2\vec{j}\right)=-2g$
b) Por el camino superior OB: $C_2=-g\,\vec{j}\bullet\left(2\vec{i}+2\vec{j}\right)=-2g$, tendremos el mismo resultado anterior.
c) Conclusión el campo es CONSERVATIVO y la propuesta correcta es la b.

106*. Todo cuerpo sometido a una fuerza central se dice que está en un campo:
a) DIVERGENTE
b) CONSERVATIVO
c) CONVERGENTE
d) ROTACIONAL




SOL:
PASOS A SEGUIR
a) Se dibuja la trayectoria circular, y la aceleración normal. La fuerza actuante es perpendicular por dicho motivo en cada instante a la trayectoria.
b) El desplazamiento infinitesimal a lo largo de dicha trayectoria, $d\vec{r}$ tangente a la trayectoria, en cada instante, es perpendicular a dicha fuerza central.
c) Como $W = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$ , y el ángulo formado por los vectores es de 90º, su coseno es 0, con lo cual W=0. Por lo tanto las fuerzas centrales no hacen trabajo, la circulación a lo largo de la circunferencia es nula y las fuerzas serán conservativas, y el campo será conservativo y convergente como se propone en b y c.

107. El concepto de campo conservativo, hace referencia a algo que se conserva. Los postulados fundamentales de conservación en Física, hablan de la conservación de la energía, del momento lineal, del momento cinético o impulso angular etc. En el caso de un campo conservativo, lo que se conservará fundamentalmente será:
a) LA ENERGÍA
b) LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO
c) EL MOMENTO CINÉTICO
d) EL MOMENTO ANGULAR
SOL:
Lo que se conserva es la energía en sus diferentes formas, transformándose una en otra. La propuesta correcta es la a.

108. Si en un campo de gradientes, el potencial y por lo tanto la energía potencial final coincide con la inicial a lo largo de una línea cerrada, quiere decir que el trabajo realizado no va a depender del camino, y por lo tanto en cualquier recorrido, se deberá conservar:
a) LA ENERGÍA CINETICA
b) LA ENERGÍA POTENCIAL
c) LA ENERGÍA
d) EL MOMENTO LINEAL
SOL:
Puesto que se trata de un campo de gradientes, su intensidad deriva de una función potencial, lo cual corresponde a las características de todo campo conservativo, manteniéndose constante la energía.

109*. En la práctica real del movimiento de un cuerpo en la superficie de la Tierra, se van a producir fuerzas que al oponerse al movimiento, disipan la energía que lleva el cuerpo. Por eso al considerar el campo gravitatorio y el eléctrico como conservativos debemos suponer que:
a) QUE NO EXISTE LA FRICCIÓN CON EL MEDIO
b) QUE EL MEDIO ES AIRE O VACÍO
c) QUE LAS FUERZAS DISIPATIVAS SON DESPRECIABLES
d) QUE LAS FUERZAS DISIPATIVAS SE COMPENSAN ENTRE SÍ
SOL:
Las dos posibilidades son que se desprecien las fuerzas disipativas como se propone en c, o que no llegan a producirse como se sugiere en a o que el medio sea el vacío.

110*. La investigación para saber si un campo es conservativo, requiere como se ha visto el empleo de la circulación, pero se puede realizarse a través de un nuevo operador vectorial característico de los campos de fuerza llamado rotacional, que se define como la circulación del vector campo a través de la línea de contorno, por unidad de superficie encerrada por dicha línea, y matemáticamente con el producto vectorial del nabla por el vector intensidad del campo. Según ello el rotacional de un campo valdrá 0, si:

a) LA INTENSIDAD DEL CAMPO ES EL NABLA DE UNA MAGNITUD ESCALAR
b) SI EL ÁREA A QUE SE REFIERE FUERA MUY PEQUEÑA
c) SI EL ÁNGULO QUE FORMA EL VECTOR CAMPO CON EL VECTOR ÁREA FUERA DE 0 GRADOS
d) SI EL CAMPO FUERA CONSERVATIVO

SOL:
Dado que $C=\int(\vec{\nabla}\wedge\vec{I})\bullet d\vec{S}$, si C=0, el campo es conservativo lo que implica que $\vec{I}=-\vec{\nabla}V$, por lo tanto las propuestas d y a son correctas.

111*. La palabra rotacional, te lleva a pensar en algo que gira, o que circula, tal como la divergencia, a lo que se separa. Así, si llenamos un lavabo con agua, y disponemos un corcho flotando cerca de las paredes, al quitar el tapón, observaremos que se aproxima al desagüe cada vez más rápidamente. Si consideráramos las velocidades instantáneas que lleva el corcho, dibujando los vectores correspondientes tangentes a la trayectoria en cada momento, tendríamos un campo vectorial de velocidades, del que podríamos decir que:

a) EN ÉL EL MÓDULO DE LA VELOCIDAD NO ES CONSTANTE
b) LAS VELOCIDADES AUMENTAN EN CADA VUELTA AL ACERCARSE AL DESAGÜE
c) EL ROTACIONAL DEL VECTOR VELOCIDAD NO SE ANULA AL DAR UNA VUELTA
d) LA CIRCULACIÓN DEL VECTOR VELOCIDAD EN UNA VUELTA COMPLETA ES 0

SOL:
Se trata de un campo no conservativo, en el que por lo dicho en el enunciado el módulo de la velocidad no es constante, aumentando este cuando se aproxima al desagüe, en el que rotacional no se anula, siendo un campo rotacional por ello, con líneas de fuerza cerradas en el plano. Son correctas las propuestas a, b y c.

112*. Para Maxwell, lo que llamaba *"curl"* (bucle, rizo o rotor) de un campo de fuerzas, expresaba "*el par de rotación que se ejercía sobre las bolas eléctricas situadas en un punto del campo"*, suponiendo que había $1/2\pi$ bolas eléctricas por unidad de superficie de los remolinos magnéticos. Sin embargo no lo llama rotacional. En el mismo trabajo en el que define la convergencia del cuaternión $\sigma$ =it+ju+kv, al efectuar la operación $\nabla\sigma$=S$\nabla\sigma$+ V$\nabla\sigma$, como el primer término cambiado de signo. El segundo término que implica la operación: $i\left(\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dz}\right)+j\left(\frac{dt}{dz}-\frac{dv}{dx}\right)+k\left(\frac{du}{dx}-\frac{dt}{dy}\right)$, lo llama "*curl"* o "*version"* , que se podría traducir por rotor o vuelta. En carta al profesor Tait, le dice: "*La parte escalar la llamaría convergencia del vector función, y la parte vectorial la llamaría el "curl" (bucle) del vector función. Aquí el término bucle no tiene nada que ver con un tornillo o hélice. La palabra "turn" o "version" (vuelta) a su vez sería mejor que la palabra "twist" (giro), porque giro sugiere un tornillo. La palabra "curl" (bucle o rotor) está libre de la noción de rosca y es suficientemente clásica, aunque demasiado moderna para los matemáticos puros, así que por el bien de Cayley* (matemático de la época de Maxwell) *podría decir "curl" (rotor) (en la costumbre de enrollarse)"*.Por ello el concepto original de rotacional o rotor:

a) NO TIENE NADA QUE VER CON EL ACTUAL
b) SOLO HACE REFERENCIA A ALGO QUE GIRA
c) ES UNA SIMPLE OPERACIÓN MATEMÁTICA SIN SENTIDO FÍSICO
d) SÓLO SE EMPLEA EN EL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

SOL:
Hace referencia a algo que gira, ya que en la mayoría de los campos en los que es distinto de cero, las líneas de fuerza son circulares, aunque inicialmente era una simple operación matemática sin sentido físico. Son correctas las propuestas b y c.

113,El ROTACIONAL DE UN CAMPO se define como: $ROT\ \vec{I} = \vec{\nabla} \wedge \vec{I}$, esto es el producto vectorial del nabla por la intensidad del campo. Por otra parte, el rotacional hace referencia a la circulación del vector campo a lo largo de una trayectoria cerrada que encierra determinada superficie, por lo que $C = \int \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{I} \right) \bullet d\vec{S}$ expresión conocida como teorema de Stokes. Por lo tanto si el rotacional de un campo es nulo dirás que la circulación a lo largo de una línea cerrada en dicho campo será:

a) 0 b) > 0 c) <0 d) infinita

SOL:

Si el rotacional es nulo, a partir de $C = \int \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{I} \right) \bullet d\vec{S}$, la circulación también lo será. Tratándose por lo tanto de un campo conservativo por lo que también se puede definir este campo como aquél cuyo ROTACIONAL ES NULO; $\vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$, por ello se le llama irrotacional. Es correcta la propuesta a

114*. Como matemáticamente el cálculo del rotacional de un vector, se puede hacer por el desarrollo del determinante formando por los vectores unitarios, los componentes del nabla y los del vector campo, en el caso de un campo conservativo en el que el rotacional sea 0, bastará con igualar entre sí las derivadas de cada componente de campo respecto a otra componente del espacio, invirtiendo después la magnitudes derivables. De esa forma para que se cumpla que en un campo conservativo el rotacional de su intensidad se nulo bastará con :

a) IGUALAR A CERO CADA COMPONENTE VECTORIAL

b) IGUALAR A CERO SU CIRCULACIÓN

c) IGUALAR A CERO SU DIVERGENCIA

d) IGUALAR LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNAS COMPONENTES VECTORIALES RESPECTO A SUS POSICIONES INVERTIDAS

SOL:

Al hacer el producto vectorial del nabla $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{k}$ por la intensidad del campo

$\vec{I} = I_x\ \vec{i} + I_y\ \vec{j} + I_z\ \vec{k}$ e igualar a 0 cada componente, nos queda como condición de CAMPO CONSERVATIVO que:

$\frac{\partial I_z}{\partial y} = \frac{\partial I_y}{\partial z}$ $\frac{\partial I_x}{\partial z} = \frac{\partial I_z}{\partial x}$ $\frac{\partial I_x}{\partial y} = \frac{\partial I_y}{\partial x}$ , por lo dicho en test anteriores son correctas las propuestas a y c, aparte de la d.

115. Dado el campo $\vec{A} = \left( 4xy - 3x^2 z^2 \right) \vec{i} + 2x^2\ \vec{j} - 2x^3 z\ \vec{k}$, dirás que es conservativo dado que:

a) LA DERIVADA DE SU COMPONENTE X RESPECTO A x ES IGUAL A LA DERIVADA DE SU COMPONENTE Y RESPECTO A y

b) LAS DERIVADA DE SU COMPONENTE X RESPECTO A y ES IGUAL A LA DERIVADA DE SU COMPONENTE Y RESPECTO A x Y ASÍ SUCESIVAMENTE CON LAS DEMÁS COMPONENTES

c) LA DERIVADA DE SU COMPONENTE Z RESPECTO A y ES IGUAL A LA DERIVADA DE SU COMPONENTE Z RESPECTO A x

d) LA DERIVADA DE SU COMPONENTE Y RESPECTO A x ES IGUAL A LA DERIVADA DE SU COMPONENTE Z RESPECTO A z

SOL:

La única propuesta correcta es la b. Para demostrarlo:

a) Se aislan las componentes del campo: $I_x = (4xy - 3x^2z^2)$ ; $I_y = 2x^2$ ; $I_z = - 2x^3z$
b) Derivada de la componente x del campo respecto a y, será igual a la derivada de la componente y del campo respecto a x, o sea $4x = 4x$
c) Derivada de la componente x del campo respecto a z, será igual a la derivada de la componente z del campo respecto a x, o sea $-6x^2z = -6x^2z$
d) Derivada de la componente y del campo respecto a z, será igual a la derivada de la componente z del campo respecto a y, o sea $0= 0$
e) Por lo tanto como se producen las tres igualdades, el campo SERÁ CONSERVATIVO.

116. Los campos cuyo rotacional es nulo se denominan también irrotacionales, por eso todo campo conservativo:

a) LAS LÍNEAS DE FUERZA CERRADAS

b) LÍNEAS DE FUERZA PARALELAS

c) LINEAS DE FUERZA ABIERTAS

d) LÍNEAS DE FUERZA CONVERGENTES

SOL:

Los campos conservativos o irrotacionales tienen líneas de fuerza abiertas, como condicionante, pudiendo ser rectas convergentes, divergentes, paralelas, curvas etc. Por eso la mejor propuesta es la c.

117. Dado el campo $\vec{F} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$ , dirás que los valores de a,b y c, para que el campo sea conservativo serán sucesivamente:

a) 4,-1, 2 b) 2, 4,-1 c) 4,2,-1 d) 1,2,4

SOL:

Se puede resolver a través de dos métodos, uno basado en el rotacional y otro en la circulación

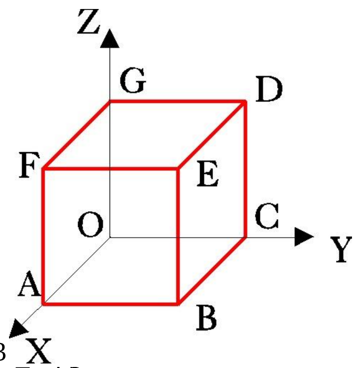
Método 1

a) Se aislan las componentes del campo: $F_x = x + 2y + az$ ; $F_y = bx - 3y - z$
$F_z = 4x + cy + 2z$

b) Se derivan parcialmente de forma "cruzada", tal como en el caso anterior, igualando las expresiones. Así : a = 4 b = 2 c = -1

c) Se podría sustituir y comprobar si se trata o no de un campo conservativo:

$$\vec{F} = (x + 2y + 4z)\vec{i} + (2x - 3y - z)\vec{j} + (4x - y + 2z)\vec{k}$$




Método 2

Calculando el trabajo por dos caminos diferentes, siguiendo el esquema del ejemplo 12. Por ejemplo, calculando el trabajo para ir de O hasta E, supuesto el lado del cubo igual a 1, en la figura

Como

$$W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = \int (x + 2y + 4z)\,dz + \int (2x - 3y - z)dy + \int (4x - y + 2z)dz$$

Camino 1 : OCDE

En OC , x=0 , z= 0 e y varía entre 0 y 1; por lo que $W = \int_0^1 (2x - 3y - z)dy = \left[-\frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

En CD , y=1 = cte ; (dy=0), x=0 y z varía entre 0 y 1, por lo que $W = \int_0^1 (4x - y + 2z)dz = \int_0^1 (2z - 1)dz = \left[z^2 - z\right]_0^1 = 0$

En DE, y=1= cte (dy=0) , z=1= cte (dz=0) , y x varía entre 0 y 1, por lo que:
$W = \int_0^1 (x + 2y + z)dx = \int_0^1 (x + 6)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^1 = 6{,}5$ . El trabajo total será -1,5 + 6,5 + 0 = 5 u. de trabajo.

Camino 2 : OABE

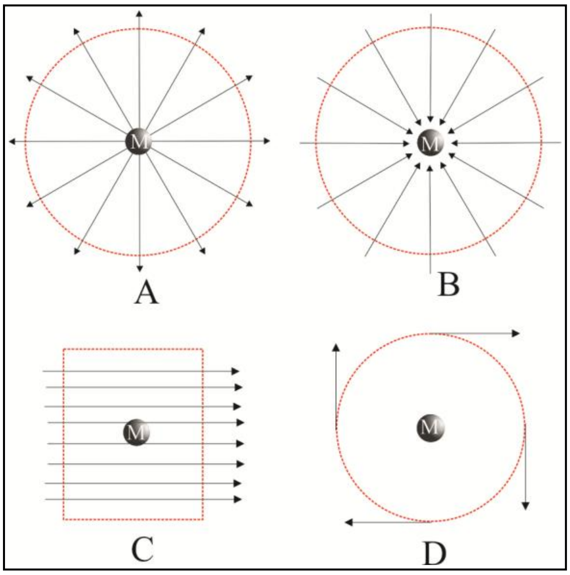
En OA, y=0 , z=0 , y x varía entre 0 y 1 por lo que $W = \int_0^1 (x + 2y + z)dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0{,}5$

En AB , x=1= cte ( dx=0) , z= 0 e y varía entre 0 y 1; por lo que $W = \int_0^1 (2x - 3y - z)dy = \left[2y - \frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = 0{,}5$

En BE , y=1 = cte ; (dy=0), x=1 (dx=0) y z varía entre 0 y 1, por lo que
$W = \int_0^1 (4x - y + 2z)dz = \int_0^1 (2z + 3)dz = \left[z^2 + 3z\right]_0^1 = 4$

El trabajo total será 0,5 + 0,5 + 3 = 5 u. de trabajo. EL CAMPO ES CONSERVATIVO.

La propuesta correcta es la c.




118a. El campo de los dados en la figura, con las características: $\vec{\nabla}.\vec{I} > 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

Será el: a) A b) B c) C d)D

SOL:

De los campos dados el único que tiene divergencia positiva y rotacional nulo, por ser conservativo es el campo divergente A

118b. El campo de los dados en la figura, con las características: $\vec{\nabla}.\vec{I} < 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

Será el: a) A b) B c) C d) D

SOL:

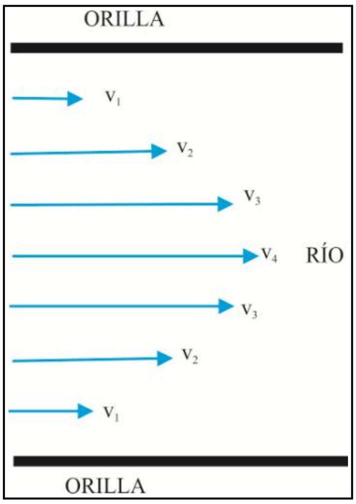
De los campos dados el único que tiene divergencia negativa y rotacional nulo, por ser conservativo es el campo convergente B.

118c. El campo de los dados en la figura, con las características: $\vec{\nabla}.\vec{I} = 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} \neq 0$

Será el: a) A b) B c) C d) D

SOL:

De los campos dados el único que tiene divergencia nula y rotacional distinto a cero, es el campo D.




119. El campo de velocidades indicado en la figura dada tiene las características:

a) $\vec{\nabla}.\vec{I} = 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} \neq 0$

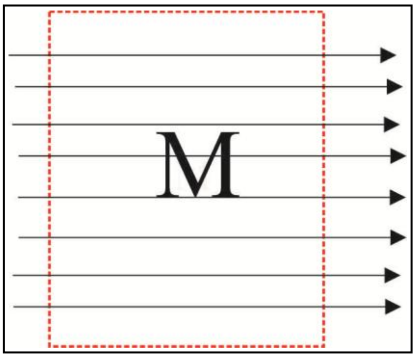
b) $\vec{\nabla}.\vec{I} > 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

c) $\vec{\nabla}.\vec{I} < 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

d) $\vec{\nabla}.\vec{I} = 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

SOL:

El campo dado tiene una circulación distinta de cero, por lo tanto no es conservativo, y su rotacional es distinto a cero, y su divergencia es nula ya que es de flujo conservativo. Por lo tanto sus características coinciden con las propuestas en a.




120. El campo indicado en la figura dada tiene en M las características:

a) $\vec{\nabla}.\vec{I} = 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} \neq 0$

b) $\vec{\nabla}.\vec{I} > 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

c) $\vec{\nabla}.\vec{I} < 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

d) $\vec{\nabla}.\vec{I} = 0; \vec{\nabla} \wedge \vec{I} = 0$

SOL:

El campo dado tiene una circulación igual a cero, por lo tanto es conservativo, y su rotacional es cero, y su divergencia es nula porque es de flujo conservativo (no hay fuentes ni sumideros). Por lo tanto sus características coinciden con las propuestas en d.