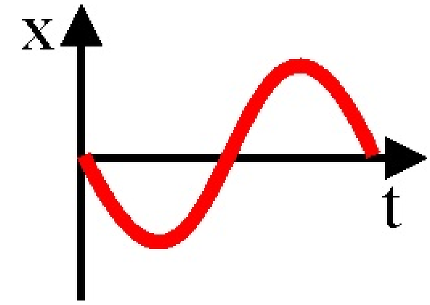
1.7.MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



1.7.1. La gráfica elongación-tiempo de un movimiento vibratorio armónico (M.A.S.) tiene la forma de la figura. Luego, la expresión de su velocidad será:

a) $v = -A.\,\omega \cos \omega\, t$

b) $v = -A.\,\omega\; sen\omega\, t$

c) $v = A.\,\omega \cos \omega\, t$

d) $v = A.\,\omega\; sen\omega\, t$

e) $v = A^2.\,\omega \cos \omega\, t$

SOL:

La gráfica elongación-tiempo de un movimiento vibratorio armónico puede expresarse mediante una función que contenga el seno o el coseno. De la gráfica se observa que para t=0, x=0, por tanto, en este caso hemos de descartar la función coseno ya que para t=0 el coseno es uno.

Con el empleo de la función seno, en principio, son posibles dos soluciones:

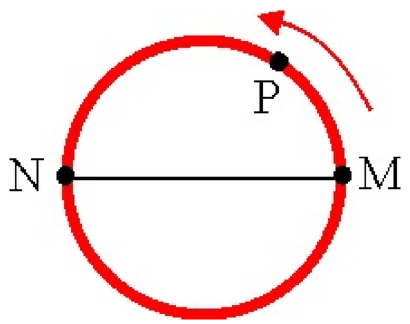
$$x = A.\;\; sen\omega\, t \qquad (1)$$

$$x = -A.\;\; sen\omega\, t \qquad (2)$$

La representación (1) no es adecuada puesto que para valores de $\omega t \langle 90°$, el seno ωt toma valores positivos y no negativos como indica la gráfica. Si utilizamos la expresión (2) con un signo negativo delante, al dar valores a la variable t se obtiene la gráfica de la cuestión. Para hallar la expresión de la velocidad recordemos que:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(-A.sen\,\omega t)}{dt} = -A.\,\omega \cos \omega\, t$$

La opción correcta es la a.



1.7.2.* Si un punto material sale de M y llega a N según el esquema de la figura en un tiempo t, recorriendo una semicircunferencia con movimiento uniforme, su proyección sobre un diámetro MN describe un M.A.S. (movimiento armónico simple), representado por una función cosenoidal cuya:

a) AMPLITUD ES EL RADIO

b) ACELERACIÓN ES 0

c) PERÍODO ES 4t SEGUNDOS

d) PULSACIÓN ES π/t rads^{-1}

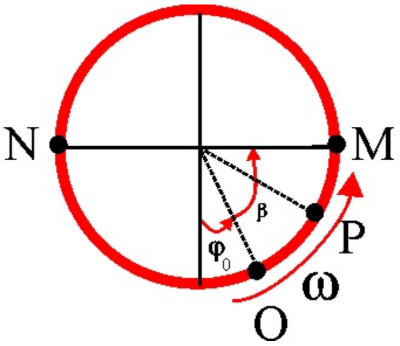
e) FASE INICIAL ES π RADIANES

SOL:

Si referimos el movimiento a un sistema centrado en la circunferencia, la máxima separación desde la posición de equilibrio tendrá una amplitud igual al radio.

Al considerar la ecuación del movimiento $x = R\cos(\omega t + \varphi)$ (I), $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ Si en el punto M, x=R, si comienzan allí a contarse los tiempos, $\varphi = 0$ y $a = -R\omega^2$.

El período T, será 2t, pues es el tiempo que tarda en regresar a la posición inicial M, y la pulsación o velocidad angular $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{t}$ rad.s^{-1}.Por todo ello, serán correctas la a, y la d.



1.7.3*. Si un punto material P que recorre la circunferencia según el esquema de la figura se encuentra en el instante inicial en O, dirás que su proyección sobre el diámetro MN realiza un M.A.S. representado por una función cosenoidal que tiene:

a) UNA AMPLITUD IGUAL AL DIÁMETRO
b) UN PERÍODO QUE SERÁ EL TIEMPO QUE TARDA P EN VOLVER A PASAR POR EL PUNTO O
c) UNA FASE INICIAL φ_0
d) UNA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO $x = R\cos(\omega t + \varphi_0)$
e) UNA ACELERACIÓN IGUAL A LA CENTRÍPETA MULTIPLICADA POR $\cos(\omega t + \varphi_0)$

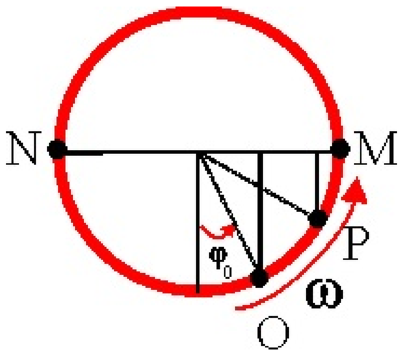
SOL:
Según lo dicho en la cuestión anterior, la amplitud será R, y dado que el tiempo comienza a contar desde O, el período será el tiempo que tarda en volver a pasar por O. La fase inicial, o espacio angular recorrido antes de empezar a contar los tiempos será φ_0.

Al proyectar el radio sobre el diámetro MN, $x = R.\cos\beta$, pero β es complementario del $(\omega t + \varphi_0)$, por lo tanto, $x = R\cos(\omega t + \varphi_0)$ (I), que invalida la propuesta d.

La aceleración, es $a = -R\omega^2$.
La a normal,

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{[R\omega\cos(\omega t + \varphi_0)]^2}{R} = R\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

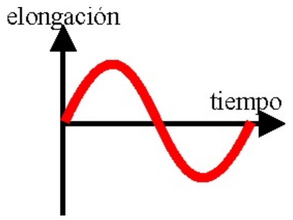
que no puede ser igual a la propuesta e. Por lo tanto son válidas la c y la b



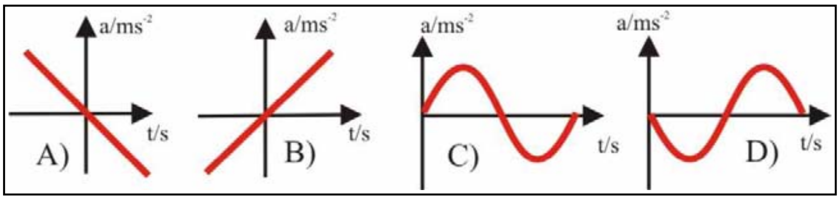
1.7.4.* Dado el esquema de la figura en el cual un punto material P recorre la circunferencia con módulo de su velocidad constante, partiendo inicialmente de O, podrás decir que su proyección sobre el diámetro MN:

a) RECORRE DOS VECES LA DISTANCIA MN CUANDO P DA UNA VUELTA COMPLETA
b) TIENE COMO FASE INICIAL EL ÁNGULO φ_0
c) DA UNA OSCILACIÓN COMPLETA CUANDO VUELVE A PASAR POR EL MISMO SITIO EN EL MISMO SENTIDO DE SU MOVIMIENTO
d) TIENE UNA PULSACIÓN QUE SERÁ IGUAL A 2π RADIANES DIVIDIDOS POR EL TIEMPO QUE TARDA EN DAR UNA OSCILACIÓN COMPLETA
e) TIENE POR ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO $x = R\,sen(\omega t + \varphi_0)$

SOL:
Todas las propuestas son válidas, teniendo en cuenta lo citado en las cuestiones anteriores, y las definiciones de oscilación completa, pulsación, período y fase inicial.
La propuesta e, se ha demostrado también con anterioridad.



1.7.5. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico (M.A.S.) cuya elongación frente al tiempo está representada en la gráfica adjunta. La representación de la aceleración (eje Y) frente al tiempo (eje X) será:



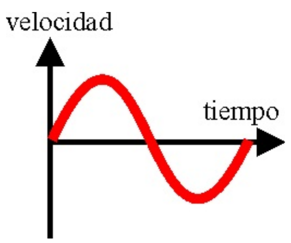
a) A b) B c) C d) D

SOL:
De la gráfica elongación-tiempo se deduce que la ecuación del movimiento es: $x = A.\,sen\omega\, t$ y de aquí:

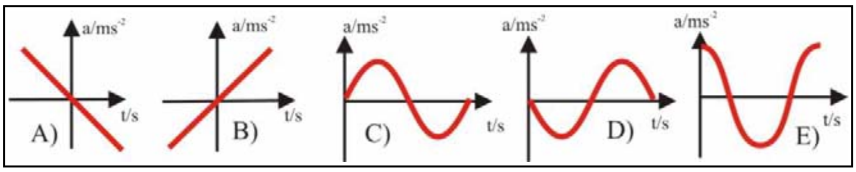
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A.sen\,\omega t)}{dt} = A.\,\omega \cos\omega\, t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A\omega.\cos\omega t)}{dt} = -A.\,\omega^2 sen\omega\, t$$

Al estar relacionada la aceleración con la variable tiempo por una función seno, se han de rechazar las opciones a y b.
Como la expresión de la aceleración lleva un signo menos delante de la función seno se ha de descartar la opción c, quedando como solución de la prueba la d.



1.7.6. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico, siendo la representación de la velocidad frente al tiempo, la gráfica adjunta. La representación de la aceleración (eje Y) frente al tiempo (eje X) será:

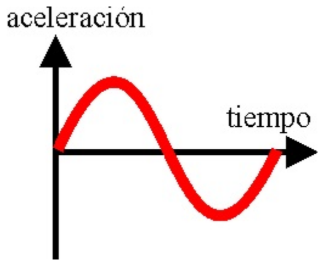


a) A b) B c) C
d) D e) E

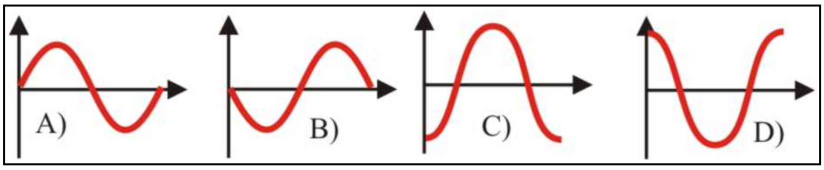
SOL:
De la gráfica velocidad-tiempo se deduce que la función que relaciona la velocidad con la variable tiempo es una función seno: $v = A\omega.sen\omega\, t$
por tanto:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(A\omega.sen\,\omega t)}{dt} = A.\,\omega^2 \cos\omega\, t,$$ por ser una función coseno,

cuando t=0, $\cos(\omega t) = 1$ y $a = A.\,\omega^2$.
El valor positivo de **a** cuando t=0 sólo es posible en la opción e.



1.7.7. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico (M.A.S.), siendo la representación de la aceleración frente al tiempo, la gráfica adjunta. La representación de la elongación (eje Y) frente al tiempo (eje X) será:



a) A b) B
c) C d) D

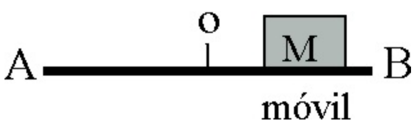
SOL:

De la gráfica aceleración-tiempo se deduce que la aceleración está ligada a la variable tiempo mediante una función seno; $a = A.\,\omega^2 sen\omega\, t$

Recordemos que a partir de la expresión de la elongación obtenemos la de la aceleración derivando dos veces aquella, si además tenemos en cuenta que la derivada de la función seno es el coseno y la del coseno es menos el seno, resulta que la función elongación-tiempo es $x = A.sen\omega\, t$ lo cual se comprueba por la derivación: $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\left(A.sen\,\omega t\right)}{dt} = A.\,\omega \cos\omega\, t$ y

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(A\omega.\cos\omega t\right)}{dt} = -A.\,\omega^2 sen\omega\, t = -\omega^2 x$$

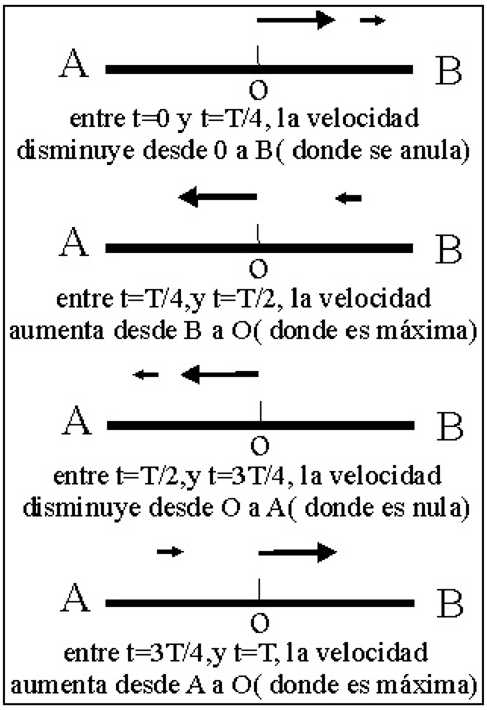
De la expresión anterior se deduce que la aceleración tiene un signo negativo respecto de la elongación, esto quiere decir que cuando x es +, **a** es -, por tanto la opción que cumple este requisito es la b.



1.7.8. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico (M.A.S.) sobre el eje AB, siendo estos puntos sus posiciones extremas. Para la posición M del móvil:

a) SU VELOCIDAD ESTÁ SIEMPRE DIRIGIDA HACIA B
b) SU VELOCIDAD ES NULA
c) SU VELOCIDAD ESTÁ DIRIGIDA HACIA O
d) SU VELOCIDAD PUEDE ESTAR DIRIGIDA HACIA B O HACIA O
e) SU VELOCIDAD, EN MÓDULO, ES LA MÁXIMA QUE PUEDE TENER EL MÓVIL

SOL:



Hemos de recordar cómo está dirigida la velocidad en un movimiento vibratorio armónico. Si se cuenta el tiempo cuando el móvil pasa por la posición O y se dirige a B, en ese tramo la velocidad está dirigida hacia la derecha de modo que la velocidad es máxima en O y nula en B. Cuando el móvil se desplaza desde B hacia O la velocidad está dirigida hacia la izquierda y disminuye hasta anularse en A.

Finalmente cuando el móvil pasa desde A hasta O la velocidad está dirigida hacia la derecha. La forma gráfica de expresar todo lo anterior es: entre t=0 y t=1/4 del período la velocidad disminuye desde O a B (en B se anula).

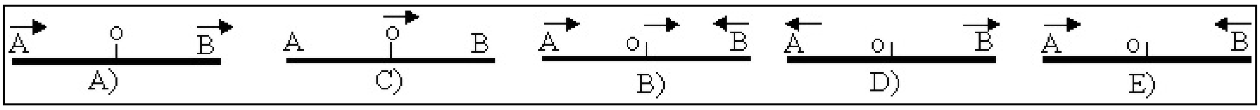
Entre t=1/4 y t=1/2 del período la velocidad aumenta desde B a O (en O es máxima).

Entre t=1/2 y t=3/4 del período la velocidad disminuye y se hace nula en A.

Entre t=3/4 del período y t= un período la velocidad aumenta y se hace máxima en O.

Al observar las dos primeras figuras se deduce que el móvil M puede tener la velocidad dirigida hacia O o hacia B, situación que coincide con la opción d.

1.7.9. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico simple (M.A.S.) sobre la línea AB. En los cinco dibujos se representa el vector velocidad del móvil en distintas posiciones. Sólo hay un dibujo correcto. Señálalo:



b) B c) C d) D e) E

SOL:

Al observar los dibujos de la prueba se deduce que A y B representan los extremos de la oscilación. Recordemos que en un movimiento vibratorio armónico la velocidad en los extremos es nula y tiene un valor máximo en el punto central de la oscilación, esto es, en el punto O. Por consiguiente la respuesta correcta es la opción c.

1.7.10. Un móvil efectúa un movimiento vibratorio armónico (M.A.S.) sobre el eje X. Cuando t=0 el móvil tiene una elongación cero y cuando t=T/4 la elongación del móvil es -A (siendo A la amplitud). Luego, la ecuación que describe este movimiento es:

a) $x = A\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$ b) $x = A\cos(\omega t + \pi)$

c) $x = A\cos(\omega t)$ d) $x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

SOL:

La ecuación que describa el movimiento de la partícula tiene que dar como solución para t=0, x=0 y para t=T/4 (un cuarto de período), x=-A. Una forma de resolver la prueba es ensayar cada una de las opciones.

Opción a:

$x = A\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$ para t=0, $x = A\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

para t=T/4, $x = A\cos\left(\omega \cdot \frac{T}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi T}{4T} + \frac{3\pi}{2}\right) = A\cos(2\pi) = +A$

Opción b:

$x = A\cos(\omega t + \pi)$; para t=0, $x = A\cos(+\pi) = -A$

Opción c:

$x = A\cos(\omega t)$; para t=0, $x = A\cos(0) = +A$.

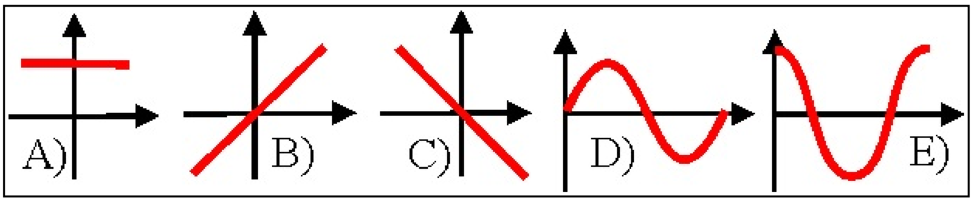
Opción d:

$x = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$; para t=0, $x = A\cos\left(+\frac{\pi}{2}\right) = 0$

para t=T/4, $x = A\cos\left(\frac{\omega T}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi T}{4T} + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\pi) = -A$

La opción d es la correcta.

1.7.11. En un movimiento vibratorio armónico la representación de la aceleración del móvil (eje Y) frente a la elongación (eje X) es:

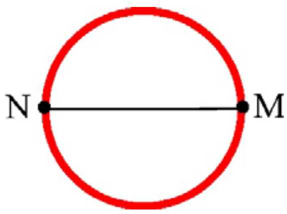


a) A b) B c) C d) D

SOL:
En el movimiento armónico simple, la aceleración está relacionada con la elongación por la expresión $a = -\omega^2 x$ La ecuación anterior nos dice que al representar **a** frente a x obtenemos una línea recta que pasa por el origen. Son, por tanto, desechables las opciones a, d, y e. Para decidir entre b y c fijémonos que la pendiente de la recta es $-\omega^2$ esto es, negativa. Por consiguiente la opción correcta es la c.

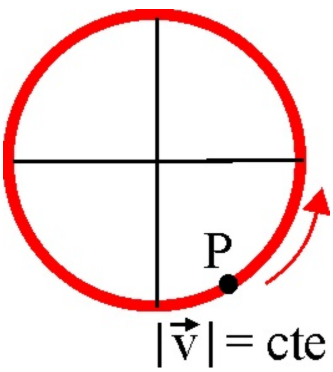
1.7.12.* Si un punto material describe un M.A.S. recorriendo un diámetro, en las posiciones en que invierte el sentido de su movimiento, dirás que:

a) SU VELOCIDAD ES 0
b) SU ACELERACIÓN ES 0
c) SU VELOCIDAD ES MÁXIMA
d) SU ACELERACIÓN CAMBIA DE SENTIDO
e) SU ACELERACIÓN ES MÁXIMA



SOL:
Las posiciones en la que invierte el sentido de su movimiento son los puntos M, y N de la figura. Esos puntos corresponden a máximas separaciones de la posición central. Si la ecuación es la dada en 1.7.2.(I), con una fase inicial de $\pi/2$ radianes, al empezar a contar los tiempos en M, en dicho punto x = R, la velocidad será 0, la aceleración $a = -R\omega^2$, aunque siempre tiene el sentido contrario al de su movimiento. Si la proyección se aleja del punto de equilibrio, estará dirigida hacia el centro. Sólo será máximo su valor absoluto. Por todo ello son correctas sólo las propuestas a y e.

1.7.13.* Si te dicen que un punto material se mueve describiendo una trayectoria circular de forma que el módulo de su velocidad se conserva constante, asegurarás que su proyección sobre un diámetro cualquiera de dicha circunferencia realizará un movimiento:



a) UNIFORME
b) UNIFORMEMENTE ACELERADO
c) CON ACELERACIÓN QUE DEPENDE DE LA DISTANCIA AL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA
d) CON ACELERACIÓN CUYO SENTIDO VECTORIAL ES CONTRARIO AL DE SU VELOCIDAD SALVO EN SUS EXTREMOS
e) ARMÓNICO SIMPLE

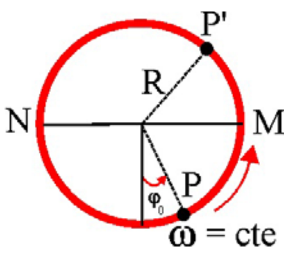
SOL:
Por todo lo dicho anteriormente, serán válidas las propuestas c, d y e.

1.7.14.* Si estudias con detenimiento el movimiento armónico simple podrás asegurar que:

a) LA ELONGACIÓN ES LA SEPARACIÓN INSTANTÁNEA A SU POSICIÓN DE ORIGEN O DE EQUILIBRIO
b) LA AMPLITUD ES LA SEPARACIÓN MÁXIMA DE SU POSICIÓN A LA DE ORIGEN O DE EQUILIBRIO
c) LA FRECUENCIA DE DICHO MOVIMIENTO ES EL NÚMERO DE VECES POR SEGUNDO QUE RECORRE EL DIÁMETRO
d) EL PERÍODO ES EL TIEMPO QUE TARDA EN RECORRER UN DIÁMETRO

SOL:

Las propuestas que se hacen corresponden a definiciones de magnitudes en el M.A.S., sin embargo son erróneas las c y d, dado que no hacen referencia a la oscilación completa que corresponde a 2 diámetros. Son correctas las a,b .



1.7.15. Si un punto material que sale de P según el esquema de la figura recorre la circunferencia de radio R con velocidad angular constante, y tarda un tiempo t en llegar a P', su proyección sobre el diámetro MN, tendrá por ecuación de movimiento:

a) $x = R\ sen(\omega t + \varphi_0)$ b) $x = 2R\cos(\omega t + \varphi_0)$

c) $x = R\cos(\omega t + \varphi_0)$ d) $x = R\ sen(\omega t)$

e) $x = 2R\ sen(\omega t + \varphi_0)$

SOL:

Según lo que se ha visto, la única solución correcta será la a.

1.7.16. Un movimiento vibratorio armónico está representado por la ecuación x = A· sen(2π/T)t, luego su velocidad vendrá expresada por:

a) $v = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$ b) $v = TA\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$

c) $v = tA\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$ d) $v = \left(\frac{2\pi}{T}\right)A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$

e) $v = \left(\frac{2\pi}{T}\right)A\cos\ t$

SOL:

Basta recordar la relación entre velocidad y elongación;

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[Asen\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right]}{dt} = A.\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t$$

la respuesta correcta es la d

1.7.17. La velocidad con que se desplaza la proyección de un punto material que recorre la circunferencia con velocidad angular constante depende únicamente:

a) DEL RADIO
b) DEL ÁNGULO RECORRIDO Y DE LA AMPLITUD
c) DEL TIEMPO, VELOCIDAD ANGULAR O PULSACIÓN Y DEL RADIO
d) DE LA ELONGACIÓN, DEL RADIO Y DE LA VELOCIDAD ANGULAR
e) DE LA ELONGACIÓN Y DE LA VELOCIDAD LINEAL

SOL:

Si partimos de la función $x = R\ sen(\omega t + \varphi_0)$ (I), al derivarla, nos daría, $v = R\ \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ (II). Si en (I), despejamos la función sinusoidal, elevándola al cuadrado y hacemos lo mismo en (II):

$sen^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{x^2}{R^2}$ y $\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{v^2}{(\omega R)^2}$, dado que su suma es 1:

$1 = \frac{x^2}{R^2} + \frac{v^2}{(\omega R)^2}$ y despejando v, $v = \omega R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$ (III), que corrobora la propuesta d.

Las demás soluciones no contemplan la posibilidad de un ángulo de fase inicial, y en el caso específico e, no consideran la dependencia del radio.

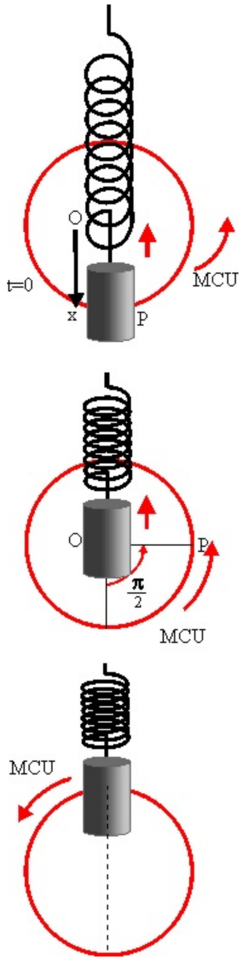
1.7.18.* El conocimiento de lo que es un M.A.S te permitirá asegurar que:

a) LA ELONGACIÓN DE DICHO MOVIMIENTO VENDRÁ DADA POR UNA ECUACIÓN EN FUNCIÓN DEL COSENO O DEL SENO DEL ÁNGULO RECORRIDO SEGÚN EL PUNTO DE ORIGEN DEL MOVIMIENTO O DEL DIÁMETRO O EJE QUE SE TOME COMO REFERENCIA
b) SU AMPLITUD SERÁ EL RADIO O EL DIÁMETRO SEGÚN EL PUNTO DE REFERENCIA DE SALIDA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME DEL QUE EL M.A.S RESULTA PROYECCIÓN
c) LA AMPLITUD SI LA PROYECCIÓN PARTE DEL CENTRO NUNCA SUPERARÁ EL RADIO
d) LOS ÁNGULOS RECORRIDOS SIEMPRE SE MEDIRÁN EN RADIANES
e) SU FRECUENCIA ES EL NÚMERO DE VECES QUE LA PROYECCIÓN RECORRE EL DIÁMETRO EN UN SEGÚNDO

SOL:

En función de las definiciones y fórmulas aplicadas, se podrá asegurar que son correctas las propuestas a, c, y d

1.7.19. Si comparas el M.A.S que realiza un cuerpo suspendido de un resorte con un hipotético movimiento circular uniforme que en el mismo tiempo podría realizar un punto P del mismo tal como se muestra en el esquema, te darás cuenta de que:



a) CUANDO RECORRE UNA SEMICIRCUNFERENCIA LA VELOCIDAD DEL M.A.S CAMBIA DE SENTIDO
b) LA FUERZA QUE EJERCE EL RESORTE TIENE EL MISMO SENTIDO QUE EL DESPLAZAMIENTO
c) LA FASE INICIAL DEL MOVIMIENTO ES $\pi/2$ RADIANES
d) EL DESPLAZAMIENTO Y LA VELOCIDAD ESTÁN DESFASADOS 90°
e) LA AMPLITUD DEL MOVIMIENTO ES EL DIÁMETRO

SOL:

Si se parte del punto O como de equilibrio, se estira el resorte y se dispone en un sistema de ejes, en el punto P, y=-R. Para describir esta situación necesitaremos una ecuación horaria: $y = R\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right)$ (I).

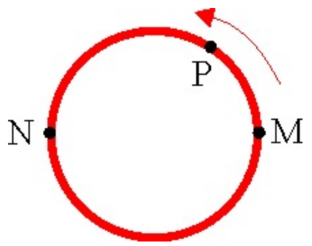
Y así para t=0, $y = R\cos(+\pi) = -R$

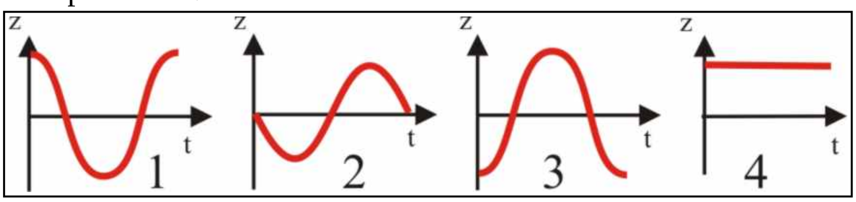
De esta forma al recorrer una semicircunferencia, t=T/2, y como $v = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left[R\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right)\right]}{dt} = R.\frac{2\pi}{T}sen\left(\frac{2\pi t}{T}+\pi\right)$ (II),

al sustituir en (II), para t=0, v=0 y para t=T/2, v=0, por lo tanto no cambia de sentido v, lo que invalida la solución a, al igual, por lo mencionado anteriormente que la c y la e. Sin embargo, al depender el desplazamiento y la velocidad de funciones trigonométricas complementarias, ambas magnitudes estarán desfasadas $90°$. Confirmando la propuesta d.

Así mismo en el punto P, y en la situación de equilibrio, la fuerza que ejerce el resorte, igual y contraria a la de deformación del mismo, tiene sentido contrario al desplazamiento que se efectuó sobre él para sacarlo de dicha situación, invalidando la propuesta b.

1.7.20.* Los gráficos dados en los cuales se estudia la variación de una magnitud z con el tiempo, en un M.A.S que corresponde a la proyección de un punto que saliendo de la posición indicada recorre la circunferencia con un M.C.U. De ellos dirás que z corresponderá a:

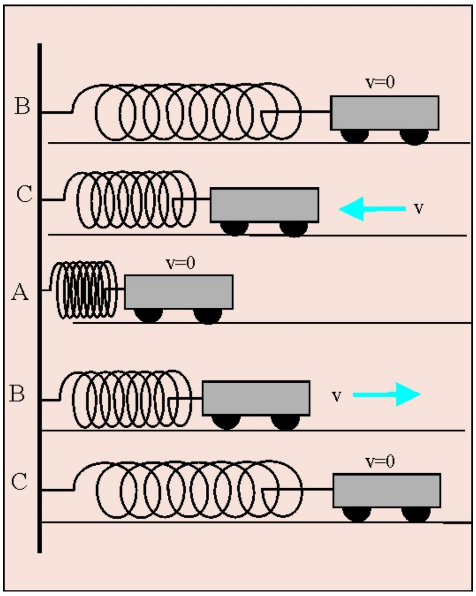




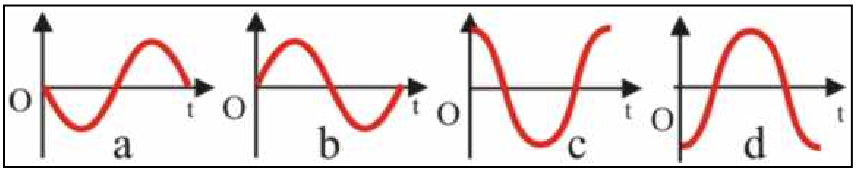
a) ELONGACIÓN EN 1 b) ACELERACIÓN EN 3
c) VELOCIDAD EN 2 d) VELOCIDAD ANGULAR EN 4

SOL:

Si el punto inicia su movimiento a partir de M, la función representativa de su movimiento, dado que x=R, para t=0, será $x = R\ \cos\omega t$ (I), $v = -R\ \omega\ sen(\omega t)$ (II), y $a = -\omega^2 x$ (III). Por lo tanto, en la 1, z corresponde a una elongación. En 2, z será v, en 3, z será a, y en 4, z representará la velocidad angular que se mantiene constante, siendo correctas las cuatro propuestas.



1.7.21. Si estiras un muelle que mantiene un carrito sobre una mesa sin rozamiento y llegado a una determinada posición, lo sueltas tal como muestra el esquema de la figura, el vector velocidad con que se mueve dicho cuerpo variará con la posición x y con el tiempo. De todos los gráficos dados, el que mejor representa dicha variación será el:



a) a b) b c) c
d) d e) NINGUNO DE LOS DADOS

SOL:

Si el tiempo lo comenzaras a contar desde que sueltas al objeto, que para t=0,x=A, la ecuación de su movimiento podrá ser $x = A sen\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$ (I), y por lo tanto:

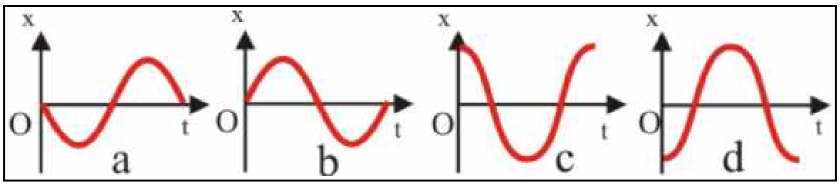
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[A sen\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)\right]}{dt} = A \,.\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (II).}$$

Las diferentes posiciones indicadas corresponden a intervalos de tiempo t=0 , T/4, T/2, 3T/4 y T, que sustituidos en la ecuación (II),nos da valores de v, respectivos de 0, $-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)$ -0, $A\left(\frac{2\pi}{T}\right)$ que corresponden a la propuesta a.

1.7.22. Dada la ecuación del movimiento que realiza una masa colgada de un resorte previo impulso inicial, y en el SI:

$$x = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

la gráfica que mejor corresponde a la descripción de dicho movimiento es de las dadas es la:



a) a b) b c) c
d) d e) NINGUNA DE LAS DADAS

SOL:

Bastaría con comprobar los valores que toma x, en la ecuación dada, que toma la forma de $x = 2\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right)$ para t=0, T/4, T/2 y 3T/4. Así vemos que en estos casos y sucesivamente x=0, -2, 0 y 2, siendo la gráfica a, la que así lo representa.

1.7.23.* Dada la ecuación de un M.A.S, en el SI, $x = 0{,}2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ podrás decir que:

a) LA AMPLITUD DE DICHO MOVIMIENTO ES 0,2
b) EL PERÍODO SERA DE 0,5 SEGUNDOS
c) EL ÁNGULO DE FASE ES DE 45°
d) LA ELONGACIÓN SERA 0, UN CUARTO DE SEGUNDO DESPUÉS DE COMENZAR EL MOVIMIENTO
e) SU VELOCIDAD MÁXIMA VALDRÍA $\frac{\pi}{5}$ m/s

SOL:

Comparando dicha ecuación con la correspondiente $y = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ (I), A=0,2 , $\pi = \frac{2\pi}{T}$ y T=2s y el ángulo de fase será $\varphi = \frac{\pi}{4} rad = 45°$ y para que y=0, $\pi\, t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ o sea $t = \frac{1}{4} s$

Derivando la ecuación dada, $v = -0{,}2\pi\, sen\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ que será máxima si $\pi\, t + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ y valdrá $v = 0{,}2\pi = \frac{\pi}{5} ms^{-1}$

Por lo tanto, sólo serán correctas las propuestas a,c,d y e.

1.7.24.* Si te dicen que un punto material de 2 kg realiza un M.A.S de 0,1m de amplitud y que en un punto cuya elongación es de 0,05m su velocidad es de 4,35cm/s, podrás asegurar que:

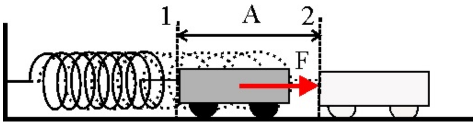
a) LA FRECUENCIA ES DE $\frac{1}{4\pi} Hz$
b) SU PULSACIÓN ES DE 0,5 rad/s
c) SU ECUACIÓN HORARIA ES $x = 0{,}1\cos\left(\frac{t}{4\pi}\right)$
d) SU VELOCIDAD MÁXIMA ES DE 0,1 m/s
e) SU MÁXIMA ACELERACIÓN ES DE 0,025 m/s^2

SOL:

Para t=0, la posición vendría dada por la función coseno y un ángulo de fase 0. Así, para la representar dicho movimiento, $x = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ siendo A=0,1m. Dada la ecuación $v = \omega A\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$, sustituyendo $0{,}0435 = 0{,}1\omega\sqrt{1 - \frac{0{,}05^2}{0{,}1^2}} = 0{,}087\omega$, de lo que $\omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}5\, rads^{-1}$ que confirma la solución b, así como la a, ya que $0{,}5 = 2\pi\nu$; $\nu = \frac{1}{4\pi} Hz$

Por lo tanto, la ecuación horaria será: $x = 0{,}1\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ que invalida la propuesta c. Derivándola, $v = -\frac{0{,}1}{2} sen\left(\frac{t}{2}\right)$ y v.máxima =0,05m/s, descartando la d.

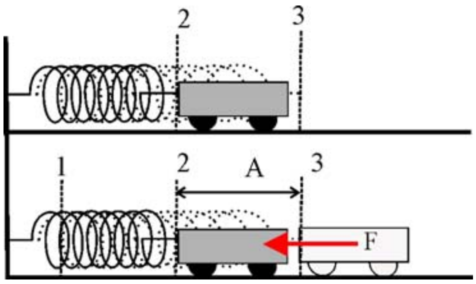
Como a=dv/dt, $a = -\frac{0{,}1}{4} sen\left(\frac{t}{2}\right)$ que será máxima para $sen\left(\frac{t}{2}\right) = -1$ a=0,025 m/s^2, confirmando la propuesta e.



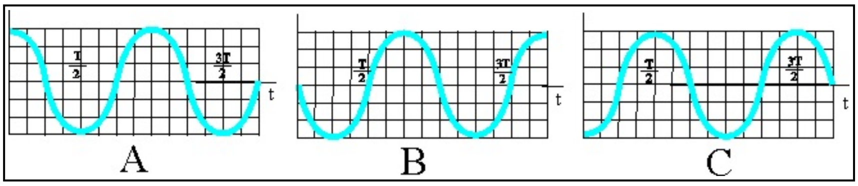
1.7.25. Si en el esquema de la figura, aplicando la fuerza F desplazas el carrito unido al resorte de la posición 1 a la 2, y luego lo sueltas sobre la mesa sin rozamiento, dirás que:

a) EL BLOQUE DESCRIBIRÁ UN MOVIMIENTO PERIÓDICO
b) LA AMPLITUD DE DICHO MOVIMIENTO ES A
c) TENDRÁ EL MÍNIMO DE VELOCIDAD EN LA POSICIÓN 2
d) AL PASAR POR 1, TENDRÁ SU MÁXIMO DE VELOCIDAD
e) PARARÁ AL VOLVER A PASAR POR 1

SOL:
Las soluciones de esta cuestión están aclaradas en el 1.7.12. En 2 y al volver a dicha posición v=0, siendo máxima en 1, cuando va de 2 a 1, y cuando vuelve de 1 a 2. Las propuestas correctas será la a, b y d.

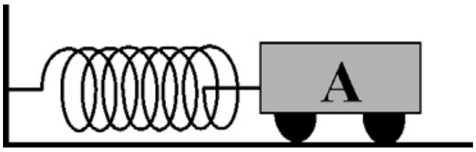


1.7.26.* Si el bloque de la figura que está sobre una mesa sin rozamiento, unido a un resorte se lleva de la posición 2 a la 3 y se suelta, realiza un movimiento armónico simple, cuyas características vienen dadas por los gráficos A, B y C de la figura. De ellos podrás decir que:

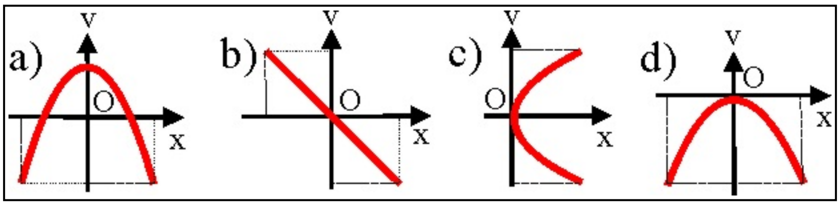


a) EL A REPRESENTA LA VARIACIÓN DE SU VELOCIDAD CON EL TIEMPO
b) EL B REPRESENTA LA VARIACIÓN DE SU POSICIÓN CON EL TIEMPO
c) EL C REPRESENTA LA VARIACIÓN DE SU ACELERACIÓN CON EL TIEMPO
d) EL B CORRESPONDE A LA VARIACIÓN DE SU VELOCIDAD CON EL TIEMPO
e) EL A CORRESPONDE A LA VARIACIÓN DE SU POSICIÓN CON EL TIEMPO

SOL:
Las soluciones a esta cuestión corresponden a un razonamiento igual al desarrollado en la 1.7.25.Basta con representar la ecuación del movimiento, determinando después la de la velocidad y aceleración, para los diferentes valores de t.
Así A será x/t,B v/t y C, a/t, siendo correctas la c,d y e.



1.7.27. Si el cuerpo A oscila con un M.A.S, sin rozamiento con el suelo, una vez que se desplaza hacia la derecha una distancia x, tal como se observa en la figura, la variación de su velocidad con su posición x sobre el suelo vendrá dada por la gráfica:



a) a b) b c) c
d) d e) NINGUNA DE LAS DADAS

SOL:

Empleando la ecuación 1.7.17.(III), aplicada a este caso $v = \omega A\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}$,que al eliminar la raíz, nos da $1 = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(\omega A)^2}$,que corresponde a la ecuación de una elipse, que no viene dada en ninguna de las cuatro gráficas, por lo que la solución correcta sería la e.

1.7.28.* Un resorte de 8cm se alarga hasta 12 cm cuando se le cuelga una masa de 200g. Si después ejerces un ligero tirón hacia abajo sobre dicha masa, hasta que el resorte alcance una longitud de 14 cm, y la sueltas, dirás que:

a) LA MASA EFECTÚA UN M.U.A
b) LA MASA EFECTÚA UN MOVIMIENTO PERIÓDICO
c) LA MASA EFECTÚA UN M.A.S DE AMPLITUD 2cm
d) EL TIEMPO QUE TARDA EN SUBIR Y VOLVER A BAJAR ES DE CASI 0,4s.

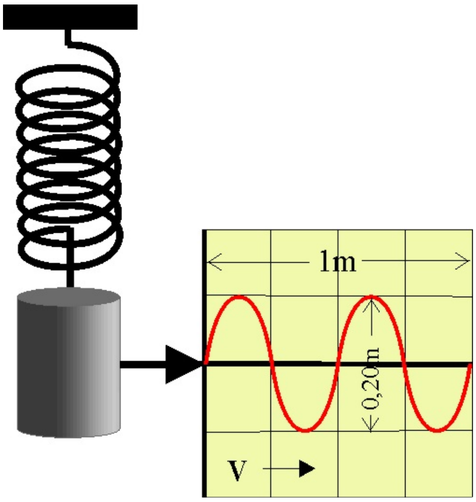
SOL:

Si la posición de equilibrio se produce con una longitud del resorte de 12cm y lo estiras antes de soltarlo hasta 14cm lo separas de dicha posición 2cm que corresponderá a la amplitud de su movimiento armónico simple, que confirma la propuesta c.

La constante elástica del resorte, dada por la ley de Hooke, k=F/x, siendo x el aumento de longitud que experimenta por acción del campo gravitatorio sobre la masa de 200g valdrá:

k = 0,2.10/(0,12-0,08)=50N/m.

Si igualas la aceleración producida por la fuerza que ejerce el resorte= -kx/m, con la del M.A.S, $a = -\omega^2 x$ y dado que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, despejando $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ Sustituyendo los valores, daría: $T = 2\pi\sqrt{\frac{0,2}{50}} = 0,4s$ que hace válida la propuesta d.



1.7.29.* Si un cuerpo de 1 kg que oscila de un muelle de forma que su movimiento sea registrado por un puntero pegado a él, en una cinta de papel que se mueve horizontalmente con una velocidad de 0,1m/s tal como indica la figura, dirás que:

a) LA FRECUENCIA DE SU OSCILACIÓN ES DE 0,2 vueltas/s
b) LA LONGITUD DE ONDA REGISTRADA ES DE 0,75m
c) LA AMPLITUD MÁXIMA DEL MOVIMIENTO ES DE 0,1m
d) LA ECUACIÓN DEL M.A.S DESARROLLADA ES $x = 0{,}1\, sen\, 0{,}4\pi\, t$

SOL:
Como se aprecia en el dibujo, el extremo del puntero describe dos ondas, con longitud de 1m, lo que implica que una onda tiene por longitud 50cm.
Como la velocidad =0,1m/s =longitud de onda por la frecuencia de oscilación, ésta valdrá: 0,1/0,5=0,2 vueltas/s, y por lo tanto la pulsación $\omega = 0{,}2\pi . 0{,}2 = 0{,}4\pi\ rad.s^{-1}$.
Según se puede observar en el dibujo, la máxima separación de la posición de equilibrio es 0,2/2=0,1m, y de esa forma la ecuación del M.A.S. será $x = 0{,}1\, sen\, 0{,}4\pi\, t$
Por todo ello, sólo serán correctas las propuestas a, c y d.

1.7.30. Cuando se combinan 2 movimientos armónicos simples hay que tener muy en cuenta la diferencia de fase entre ellos, amplitudes y frecuencias, y en el caso de que las dos primeras magnitudes sean iguales, como en el caso de y_1=3·sen2t e y_2=3·sent, la función y, que asocia a las dos tiene una:

a) AMPLITUD QUE DEPENDE DEL TIEMPO
b) AMPLITUD CONSTANTE IGUAL A 6
c) ELONGACIÓN MÁXIMA PARA t=0
d) FRECUENCIA IGUAL A $\frac{3\pi}{4}$
e) AMPLITUD IGUAL A 3

SOL:
Empleando el principio de superposición de forma que $y=y_1+y_2$=3(sen2t+sent). Si recordamos que:

sen(a)+sen(b)=2sen[(a+b)/2]cos[(a-b)/2]

aplicándolo a este caso, y=6cos(t/2)sen(3t/2), de lo que:

A=6cos(t/2) (I) e y=Asen3t/2(II),

que comparada con la ecuación de un M.A.S. $\frac{3t}{2} = \frac{3\pi t}{T}$; $T = \frac{4\pi}{3}$ por lo que la frecuencia, su inversa, $\nu = \frac{3}{4\pi}$ Hz. La amplitud máxima, según (I), para t=0, A=6, pero para t=0, la función se anula (y=0), lo cual invalida la propuesta c. De esa forma sólo es correcta la propuesta a .

1.7.31.* Si dos movimientos armónicos simples están desfasados entre si $90°$, pero tienen igual frecuencia, su combinación produce una serie de figuras muy interesantes denominadas de Lissajous, matemático francés que las investigó en 1857. Así, si se trata de obtener el movimiento resultante de $x = 3\,sen\,2\,t$ e $y = 3sen\left(2\,t + \frac{\pi}{2}\right)$, podrías decir que:

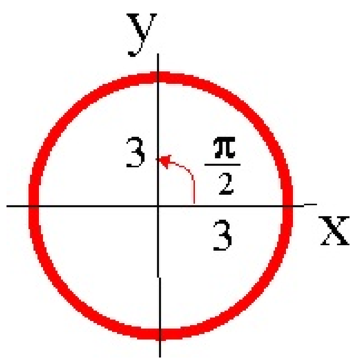
a) EL VECTOR DE POSICIÓN RESULTANTE SERÍA $\vec{r} = 3\,sen\,2t\;\vec{i} + 3\cos 2t\;\vec{j}$

b) LA AMPLITUD RESULTANTE SERÍA SIEMPRE 3

c) LA ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA ES UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO 3

d) LA FRECUENCIA DEL MOVIMIENTO SERÍA CONSTANTE E IGUAL A $1/\pi$

SOL:



Considerando que y, está desfasada $\frac{\pi}{2}$ radianes, respecto a x, su ecuación horaria se puede representar por la función complementaria, así y = 3cos2t. Como tienen la misma amplitud y frecuencia, al hacer un diagrama vectorial circular, corresponden a movimientos armónicos perpendiculares.
De esta forma si representamos conjuntamente el movimiento sobre el diámetro MM', vertical, puesto que nos dan funciones x, e y. Para t=0 x=0, y = 3, y por lo tanto el vector de posición referido al sistema de coordenadas XY, será $\vec{r} = 3\,sen\,2t\;\vec{i} + 3\cos 2t\;\vec{j}$

La ecuación de la trayectoria, se obtendría a partir de X=3sen2t, Y=3cos2t; $\cos^2 2t = Y^2/9$, $sen^2 2t = X^2/9$, por lo tanto $X^2+Y^2 = 3^2$, que es una circunferencia de radio=3.

La frecuencia se determina por comparación, así: frecuencia $\nu = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} s^{-1}$

Dado que la trayectoria es una circunferencia de radio = 3, que corresponde a la amplitud, ésta será constante. Serán correctas las soluciones a, b, c y d.

1.7.32.* La resultante de los movimientos armónicos dados por las ecuaciones $x = 3\,sen\,2\,t$ e $y = 4sen\left(2\,t + \frac{\pi}{2}\right)$ tiene:

a) UN VECTOR DE POSICIÓN $\vec{r} = 3\,sen\,2t\;\vec{i} + 4\cos 2t\;\vec{j}$

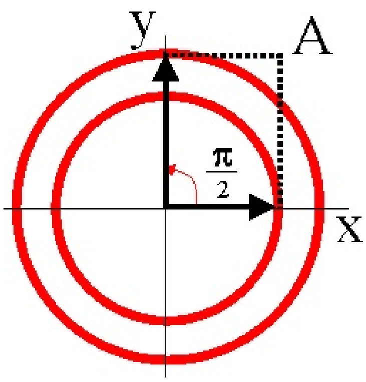
b) UNA ECUACIÓN DE TRAYECTORIA QUE ES UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO IGUAL A 5

c) UNA ECUACIÓN DE TRAYECTORIA QUE ES UNA ELIPSE DE SEMIEJES 3 Y 4

d) UNA AMPLITUD RESULTANTE CONSTANTE IGUAL A 5

e) UN PERÍODO IGUAL A π SEGUNDOS

SOL:

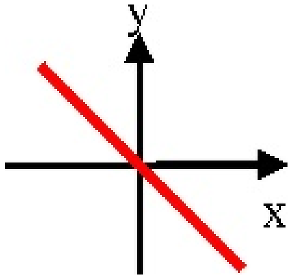


Si consideramos el movimiento como en el caso anterior, $\vec{r} = 3sen\,2t\;\vec{i} + 4\cos 2t\;\vec{j}$

A partir de las ecuaciones paramétricas correspondientes X=3sen2t, Y=4cos2t, puesto que el desfase es de $90°$ .Despejando, elevando al cuadrado y sumando estos $(X^2/3^2)+(Y^2/4^2)=1$, que es una elipse de semiejes 3,y 4.
La amplitud resultante se obtiene a través del módulo de la suma vectorial de 4**i**+3**j**. Así A=5. El período se puede calcular por comparación $2t = \frac{3\pi\,t}{T}$; $T = \pi\ s$ .Son correctas, por lo tanto las propuestas a, c, d y e.

1.7.33. La ecuación de la trayectoria resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares, de igual frecuencia y amplitud, desfasados en $180°$, sería una:

a) CIRCUNFERENCIA DE RADIO IGUAL A LA AMPLITUD
b) ELIPSE
c) RECTA BISECTRIZ DE LOS EJES XY
d) RECTA DE ECUACIÓN y = -x
e) RECTA QUE CONTENDRIA A UN DIÁMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO IGUAL A LA AMPLITUD



SOL:

Si $x = A sen(t)$ (I) y $x = A sen(t+\pi)$; por trigonometría, desarrollando sen(A+B), $x = A[sent.-1+\cos t.0] = -A sen t$ (II).

Si componemos la ecuación de la trayectoria, sustituyendo sent=x/A, en (II), y = -x, lo que demuestra la solución <u>d</u>, que equivale igualmente a la <u>e</u>, como se observa en el dibujo.